Reunión de Comunicaciones Científicas de VirtUMA. Unión Matemática Argentina, Virtual, 2021.

Teoría de agrupamientos y algoritmos de asignación muchos-a-muchos en mercados bilaterales.

Tripolone, Juan Marcos.

Teoría de agrupamientos y algoritmos de asignación en mercados bilaterales

Juan Marcos Tripolone - Doctorando en Ciencias Económicas

Universidad Nacional de Cuyo

1 Resumen

Se propone un modelo de emparejamientos muchos-a-muchos en mercados reticulares, para resolver el problema de la compraventa simultánea en forma cooperativa (grandes grupos de pequeños compradores del mismo bien en la misma ubicación, y grandes grupos de pequeños proveedores que deben agruparse para cubrir transacciones de mucho volumen) a través de un mercado bilateral.

Las tecnologías de la información han hecho posible y escalable la cooperativización en las economías digitales. Es natural que los pequeños agentes económicos se agrupen para formar un cluster o consorcio (aquí denominado "pool", para aclarar la naturaleza efímera de este asociativismo no perenne, sino circunstancial), en la inteligencia de interactuar conjuntamente en un mercado definido. Se procura probar la existencia de un álgebra subyacente que modela y delinea un grupo de compradores o vendedores como un objeto matemático y define operaciones entre estos agrupamientos de agentes. Dichas operaciones se encuentran circunscriptas dentro de un álgebra de agrupaciones, constituyendo así un conjunto de propiedades y leyes dentro de este espacio algebraico, que denominaremos "Teoría de agrupamientos" o "Teoría de pooles".

2 Modelo simplificado

A continuación se presenta una algebrización sintética del modelo de mercado bilateral, donde se puede establecer un retículo de emparejamientos muchos a muchos por contratos. Este mercado funciona como una red dual con restricciones de cuota, aciclicidad, sustituibilidad y regularidad.

Definición 1: Sea la cuatrupla $((B, q_B, p_B), (S, q_S, p_S), P, X)$ el modelo de asignaciones muchos a muchos tal que la terna (B, q_B, p_B) es un pool de compras, donde B es el conjunto de agentes compradores, q_B la cantidad total a comprar de un producto dado y p_B el precio de referencia o de equilibrio al que los compradores están dispuestos a comprar la mercancía dada; (S, q_S, p_S) es un pool de ventas donde S es el conjunto de agentes vendedores, q_S la cantidad total disponible para vender de dicho producto entre todos los vendedores y p_S el precio de referencia o de equilibrio al que los vendedores están dispuestos a vender la mercancía especificada; siendo P la plataforma de mercado bilateral donde se encuentran los grupos de compra y venta; y X el conjunto de posibles contratos o emparejamientos entre compradores y vendedores. Entonces las siguientes fórmulas representan una versión simplificada de dicho modelo.

$$((B, q_B, p_B), (S, q_S, p_S), P, X) = \begin{cases} B = \{b_1, ..., b_i, ..., b_n\} : b_i = (q_{b_i}, p_{b_i}, t_{b_i}) \ \forall \ i \in I = \{1, ..., n\} \\ S = \{s_1, ..., s_i, ..., s_m\} : s_i = (q_{s_i}, p_{s_i}, t_{s_i}) \ \forall \ i \in I = \{1, ..., m\} \\ P := Plataforma \ de \ asignaciones \ bilaterales \\ X \subseteq B \times S \end{cases}$$

Donde **B** es un conjunto de n compradores con su respectiva cantidad demandada q_{b_i}, p_B es el precio máximo que están dispuestos a pagar, **S** es el conjunto de vendedores, q_S la cantidad total que tienen disponible para ser asignada a una venta agrupada, p_S el precio unitario mínimo que están dispuestos a cobrar a sus clientes por ese producto, P es la plataforma y X es el conjunto de contratos potenciales, es decir, todas las posibles asignaciones reticulares muchos a muchos de compradores (**B**) a vendedores (**S**) en la plataforma (**P**).

Las ternas $b_i = (q_{b_i}, p_{b_i}, t_{b_i})$ y $s_i = (q_{s_i}, p_{s_i}, t_{s_i})$ representan a compradores y vendedores, con sus cantidades, precios y tiempo de ingreso a la subasta.

La asignación total ocurre cuando cada comprador pudo recibir sus unidades a un precio menor o igual al precio que prefijó, y cada oferente pudo colocar todas sus existencias disponibles a un precio mayor o igual su mínimo parametrizado.

2.1 Conjunto de asignaciones posibles

X es el conjunto de asignaciones entre compradores y vendedores.

Definición 2: Una correspondencia entre un vendedor y un comprador ocurre si y solo si la cantidad que el comprador requiere es menor o igual a la ofrecida por el vendedor, y el precio que el comprador está dispuesto a pagar es mayor o igual al precio al que el vendedor ofertó ese bien.

$X = \{x_1, ..., x_i, ..., x_n\} : x_i = (b_j, s_k) \in X \Leftrightarrow p_{b_j} \geq p_{s_k}$
$|X| \leq |B| \cdot |S|$

Esta desigualdad significa que la cardinalidad máxima del conjunto X ocurre cuando cada vendedor asigna al menos una unidad a cada comprador.

2.2 Condiciones de ordenamiento para preasignaciones entre compradores y vendedores

Esta subsección contiene una explicación completa y detallada del algoritmo de asignación, detallando lo que sucede en cada etapa del proceso.

1. Ordenar los compradores desde los que fijaron el precio más bajo que están dispuestos a pagar, hasta los que permiten los precios más altos. Si

dos compradores tienen el mismo precio, se prioriza el que más cantidad comprará. Si tienen la misma cantidad y precio, se prioriza quién ingresó primero a la subasta, constituyendo los siguientes conjuntos ordenados que digitalmente se pueden pensar como una sucesión de compuertas.

$Ord_B = \{\{b_1, ..., b_i, ..., b_n\} : b_i = (q_{b_i}, p_{b_i}, t_{b_i})/(p_{b_i} < p_{b_{i+1}}) \veebar [(p_{b_i} = p_{b_{i+1}}) \wedge (q_{b_i} > q_{b_{i+1}})] \veebar [(p_{b_i} = p_{b_{i+1}}) \wedge (q_{b_i} = q_{b_{i+1}}) \wedge (t_{b_i} < t_{b_{i+1}})] \ \forall\ i \in I\}$

2. Ordenar los proveedores desde los que están dispuestos a ofrecer precios más bajos, hasta los de precios más elevados. Si dos vendedores tienen el mismo precio, se da prioridad a quién tiene la mayor cantidad disponible. Si este valor también coincide, el proveedor priorizado es el primer emisor de la orden de venta, lo que constituye el siguiente conjunto ordenado.

   $Ord_S = \{\{s_1, ..., s_i, ..., s_n\} : s_i = (q_{s_i}, p_{s_i}, t_{s_i})/(p_{s_i} < p_{s_{i+1}}) \veebar [(p_{s_i} = p_{s_{i+1}}) \wedge (q_{s_i} > q_{s_{i+1}})] \veebar [(p_{s_i} = p_{s_{i+1}}) \wedge (q_{s_i} > q_{s_{i+1}}) \wedge (t_{s_i} < t_{s_{i+1}})] \ \forall\ i \in I\}$

3. Asignar previamente uno a uno cada $b_i = (q_{b_i}, p_{b_i}, t_{b_i}) \in Ord_B$ a cada $s_i = (q_{s_i}, p_{s_i}, t_{s_i}) \in Ord_S$ respetando sus pedidos por adelantado si se cumple la siguiente restricción: $p_{b_i} \geq p_{s_i}$.
   Si $q_{b_i} > q_{s_i}$, entonces se asigna más de un proveedor para cubrir q_{b_i}. El comprador podría obtener diferentes precios unitarios para unidades del mismo bien, siempre que dichos precios no superen su precio esperado.
   Por tanto, el monto restante de este comprador pendiente de ser cubierto $(q'_{b_i} = q_{b_i} - q_{s_i})$ debe ser colocado por el próximo vendedor del pool de venta ordenado, igualando su restricción de precio. Este proceso debe repetirse, pasando al siguiente vendedor si es necesario, hasta cubrir la cantidad total demandada por este comprador.
   Si q_{b_i} no puede ser cubierto por ningún proveedor al precio dado, pero sí una cantidad menor, la plataforma P consulta al comprador si acepta comprar esa cantidad menor y modificar su orden de compra.
   De manera similar, si la cantidad demandada por dicho comprador puede ser satisfecha, pero no al precio deseado por el comprador, la plataforma P le sugerirá que modifique su orden de compra, aumentando el precio máximo que está dispuesto a pagar. Después de desbloquear la situación, la plataforma avanzará al siguiente agente en el conjunto ordenado de compradores para repetir la evaluación anterior.
   Si las restricciones no se pueden cumplir y el comprador no acepta cantidades más bajas o precios más altos, no tendrá un proveedor asignado, a menos que se incorpore un nuevo vendedor que cumpla con esas restricciones más adelante durante el término de la subasta inversa.
   Si esto último nunca ocurre, la operación de emparejamiento entre los grupos de compra y venta asignará el grupo vacío a este comprador ($b_i \rightarrow \varnothing$).

Al llegar al último agente, habiendo ejecutado todos estos pasos para cada uno de ellos, finaliza el algoritmo de asignación, y es el momento de evaluar los resultados. Esto incluye determinar los precios promedio finales para cada agente, el precio promedio del conjunto de asignación total, el monto total asignado y los agentes que quedaron sin asignar o parcialmente asignados.

Tanto los pooles de compra como de venta se ordenan de la misma manera (es decir, los pasos 1 y 2 son equivalentes). Esto ocurre porque el algoritmo pretende ser deflacionario, y procura funcionar como una subasta inversa. Además, la optimización del algoritmo se centra en asignar tantos agentes como sea posible. Por lo tanto, si los compradores dispuestos a pagar el precio más bajo quedan últimos en la lista, hay muchas menos probabilidades de asignarlos a un proveedor. Si se pretende maximizar los beneficios para todos los participantes, el problema de la programación lineal para lograr esa maximización tendría al menos $n + 2.m$ restricciones, donde $n = |B|$, y $|m| = |S|$.

Para cualquier pool de agentes que deseen comprar o vender un producto de manera cooperativizada, las instrucciones de priorización descritas anteriormente constituyen un orden de pooles $(\langle Ord_B, \succ_B\rangle, \langle Ord_S, \succ_S\rangle)$, que permite la generación de un álgebra de agrupaciones y estructuras de reticulado.

2.3 Conjunto de agentes no asignados

El conjunto U abarca a los compradores o vendedores no asignados, que no han podido comprar o vender ninguna unidad en el transcurso de esta subasta inversa. Es decir que el operador de matching los ha asignado al vacío.

$U = X^C = \{(b_i, \varnothing), (\varnothing, s_j)\}$
$|U|$:= número de agentes de compra o venta que no pudieron comprar o vender ninguna unidad de producto.

2.4 Condiciones y restricciones cuantitativas

Algunos compradores pueden haber aceptado recibir menos producto del que requerían, mientras que algunos vendedores pueden haber logrado vender menos producto del que tenían disponible. Esto genera dos cantidades distintas a computar y controlar en cada tipo de agente, y también un remanente, que representa lo que dicho agente no pudo comprar (ni vender) aunque lo requirieran (o lo tuvieran disponible). Además, un vendedor puede haber vendido el mismo producto a más de un comprador y un comprador puede haber comprado el mismo producto a más de un vendedor en la misma operación de subasta.

Adicionalmente, se debe calcular el total asignado, que se supone menor o igual al total disponible por todos los proveedores. La cantidad total disponible por los vendedores, más la cantidad total requerida por los compradores, cierra la lista de cantidades que debe medir el modelo. Por lo tanto, hay cinco cantidades diferentes para calcular en cada lado, más una cantidad de asignación general, que se formalizan a continuación, y son cifras de interés para fines estadísticos, como calcular promedios y construir otros conjuntos útiles, como así también, para que la plataforma **P** de comercio electrónico que regula las operaciones pueda efectuar sumas de comprobación transaccional.

Cantidades para los compradores
q_B := cantidad de producto requerida entre todos los compradores.
q_{b_i} := cantidad requerida por el comprador b_i antes de ejecutar el algoritmo.
$q_{b_{i_X}}$:= cantidad individual que el algoritmo logró asignar a ese comprador.
$q_{b_{i_X}(s_j)}$:= cantidad que el consumidor b_i compró al proveedor s_j.
$q_{b_{i_R}}$:= la cantidad restante que el comprador b_i no pudo comprar.

Las cantidades para los vendedores
q_S := cantidad disponible sumando las cantidades de cada proveedor.
q_{s_j} := cantidad que estaba disponible por s_j antes de ejecutar el algoritmo.
$q_{s_{j_X}}$:= cantidad que el algoritmo logró colocar de ese proveedor.
$q_{s_{j_X}(b_i)}$:= cantidad que el proveedor s_j vendió al comprador b_i.
$q_{s_{j_R}}$:= la cantidad restante que el proveedor s_j no pudo vender.

Cantidad general
$q_{S \to B}$:= la cantidad de producto que el algoritmo pudo colocar.

El sistema de verificación de restricciones de cantidad
Al final de la ejecución del algoritmo de emparejamiento, el calcular y comparar las cantidades previamente definidas resulta útil para verificar si las asignaciones se han realizado sin errores. De hecho, se supone que se cumple alguna lógica cuantitativa. Por ejemplo, la cantidad total asignada por el algoritmo debe ser menor o igual que la cantidad total disponible por los vendedores, y también la cantidad total requerida por los compradores. Asimismo, la cantidad individual asignada a un comprador debe ser menor o igual que la cantidad que este comprador deseaba originalmente. Además de este tipo de desigualdades, aquí también se presentan algunas ecuaciones que permiten definir formal y algebraicamente las diferentes cantidades descritas anteriormente. Todo el sistema de restricciones de cantidad se denota conjuntamente como **QR**.

$$QR:\begin{cases} q_{B\to S}\leq q_S \\ q_{B\to S}\leq q_B \\ q_S=\sum_{j=1}^{m} q_{s_j}=\sum_{j=1}^{m}(q_{s_{j_X}}+q_{s_{j_R}}) \\ q_B=\sum_{i=1}^{n} q_{b_i}=\sum_{i=1}^{n}(q_{b_{i_X}}+q_{b_{i_R}}) \\ q_{s_{j_X}(b_i)}\leq q_{s_{j_X}}\leq q_{s_j}\forall\ b_i\in S_{b_i} \\ q_{b_{i_X}(s_j)}\leq q_{b_{i_X}}\leq q_{b_i}\forall\ s_j\in B_{s_j} \\ q_{s_{j_X}}=\sum_{i=1}^{n} q_{s_{j_X}(b_i)}, b_i\in S_{b_i} \\ q_{b_{i_X}}=\sum_{j=1}^{m} q_{b_{i_X}(s_j)}, s_j\in B_{s_j} \\ q_{s_{j_X}(b_i)}=q_{b_{i_X}(s_j)}\ (simetría\ ) \\ q_{s_{j_R}}=q_{s_j}-q_{s_{j_X}} \\ q_{b_{i_R}}=q_{b_i}-q_{b_{i_X}} \\ q_{s_{j_R}}=q_{s_j}, q_{s_{j_X}}=0\Leftrightarrow(\varnothing,s_j)\in U \\ q_{b_{i_R}}=q_{b_i}, q_{b_{i_X}}=0\Leftrightarrow(b_i,\varnothing)\in U \\ q_{B\to S}=\sum_{i=1}^{n} q_{b_{i_X}}=\sum_{j=1}^{m} q_{s_{j_X}} \end{cases}$$

Con la primera y la segunda restricción se expresa que la cantidad total asignada por el modelo debe ser menor o igual a la cantidad total disponible entre todos los proveedores y la cantidad total requerida por todos los compradores.

La tercera y cuarta ecuación permiten mostrar que la cantidad total disponible entre todos los proveedores corresponde a la suma de las cantidades individuales disponibles por cada proveedor, que es equivalente a la suma de las cantidades que estos proveedores podrían asignar más la cantidad que no pudieron vender, y lo mismo ocurre con los consumidores pero con la compra.

Las desigualdades quinta y sexta expresan que la cantidad total disponible por un vendedor o requerida por un comprador es siempre mayor o igual a la cantidad de producto que efectivamente se les asignó, la cual a su vez es mayor o igual a la cantidad que le fue asignada por un determinado agente en particular.

Las sumas séptima y octava expresan que la cantidad total vendida por un proveedor o comprada por un consumidor es equivalente a la suma de las cantidades individuales vendidas por ese proveedor a cada uno de sus compradores, o compradas por ese consumidor a cada uno de sus vendedores.

La novena igualdad establece que la cantidad total que un proveedor vendió a un comprador debe ser igual a la cantidad total que ese consumidor compró a ese vendedor. Las ecuaciones décima y undécima indican que la cantidad restante que un proveedor no pudo vender (o que un consumidor no pudo comprar) es igual a la cantidad total disponible o requerida por él, menos la cantidad que realmente se le asignó durante la subasta inversa.

Las ecuaciones duodécima y decimotercera indican que para los compradores o vendedores a los que no se les puede asignar ninguna unidad, la cantidad no asignada es igual a la cantidad total disponible o requerida por ellos.

La última ecuación establece que la cantidad total de producto que el modelo pudo asignar debe ser igual a la cantidad total comprada por todos los compradores y la cantidad total vendida por todos los proveedores.

En el caso en que la cantidad total inicial requerida por los compradores sea mayor que la cantidad total inicial disponible entre todos los vendedores ($q_B > q_S$), al menos un comprador no podrá completar su pedido total, mientras que si la cantidad total inicial disponible entre todos los vendedores es mayor que la cantidad total inicial requerida por los compradores ($q_S > q_B$), al menos un proveedor no podrá vender todas sus existencias disponibles.

2.5 Conjunto de agentes parcialmente asignados

Con **P** se denota el conjunto de compradores que, después de la subasta inversa, no obtuvieron la cantidad total requerida (aunque compraron al menos una unidad) junto al conjunto de proveedores que no pudieron vender todas sus existencias disponibles (aunque vendieron al menos una unidad de producto).

$$P = \{b_i : q_{b_{i_X}} < q_{b_i}, s_j : q_{s_{j_X}} < q_{s_j}\}$$

2.6 Condiciones y restricciones de precios

Habiendo construido toda la conceptualización anterior, ahora es posible analizar el comportamiento de precios en el modelo de emparejamiento. Como el número de variables que reflejan precios es mucho menor que el número de variables que reflejan cantidades, el sistema de restricciones que deben cumplir estos precios también es mucho más pequeño, y se presentará en este inciso, con el fin de ser capaces de definir los diferentes precios medios y de referencia, en aras de medir el precio resultante de un agente individual, y el precio medio al que este producto terminó cotizando después del cierre de la subasta inversa.

Denotaremos **PR** al sistema de restricción de precios y sus desigualdades.

$$PR = \begin{cases} p_{b_{i_X}} \geq p_{b_i} \forall\ b_i \in B \\ p_{s_{j_X}} \leq p_{s_j} \forall\ s_j \in S \\ b_i \in B_{s_j} \Leftrightarrow p_{b_{i_X}} \geq p_{s_{j_X}} \\ s_j \in S_{b_i} \Leftrightarrow p_{s_{j_X}} \leq p_{b_{i_X}} \end{cases}$$

La primera desigualdad indica que el precio de venta de un producto realmente asignado a un comprador es mayor o igual al precio que el comprador había establecido inicialmente. Resulta ser mayor solo cuando la plataforma le indica al comprador que no hay proveedores dispuestos a vender al precio que el comprador exige, y el comprador termina mejorando el precio máximo de compra que está dispuesto a pagar. La segunda desigualdad es análoga a la primera, pero para los vendedores. Si la desigualdad resulta ser estricta, esto indica que la plataforma le ha pedido al proveedor que baje el precio unitario al que está dispuesto a vender, y el vendedor efectivamente lo ha bajado.

Las ecuaciones tercera y cuarta dicen que para que un comprador (proveedor) haya comprado (vendido) de (a) un proveedor (comprador), el precio que está dispuesto a pagar (cobrar) por unidad debe ser mayor o igual (menor o igual) al precio que el proveedor (comprador) está dispuesto a cobrar (pagar).

2.7 Precio promedio de asignación para un comprador

Se define el precio promedio al que un comprador (vendedor) pudo adquirir (vender) un bien, contando los precios cobrados (pagados) por los agentes.

$$\overline{p_{b_i}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_{s_{j_X}(b_i)} \cdot q_{s_{j_X}(b_i)}}{q_{b_{i_X}}} \quad (1)$$

Para obtener el precio promedio al que el consumidor b_i pudo obtener su cantidad de mercancía, el precio de cada vendedor que la plataforma le ha asignado por cumplir las restricciones de precio del comprador b_i se multiplica por la cantidad que este vendedor le proveyó, y se divide por la cantidad de mercadería que el cliente pudo comprar cumpliendo con sus restricciones.

2.8 Precio promedio de asignación para un vendedor

Para obtener el precio promedio al cual el proveedor s_j pudo vender, el precio unitario con el que asignó una cierta cantidad de producto a cada uno de sus compradores se multiplica por la cantidad que ese cliente le compró, y esa suma se divide por la cantidad total vendida por dicho vendedor.

$$\overline{p_{s_j}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{b_{i_X}(s_j)} \cdot q_{b_{i_X}(s_j)}}{q_{s_{j_X}}} \quad (2)$$

2.9 Precio promedio general al cierre de operaciones

Al cerrar la subasta, es útil saber a qué precio promedio cotizó el producto.

$$\overline{p_{B \to S}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{b_{i_X}} \cdot q_{b_{i_X}}}{q_{B \to S}} = \frac{\sum_{j=1}^{m} p_{s_{j_X}} \cdot q_{s_{j_X}}}{q_{B \to S}} \quad (3)$$

Este promedio actúa como suma de control al final de la subasta inversa. De hecho, sumar la multiplicación de cada par de precios y la cantidad a la que cada comprador obtuvo sus productos y dividir esa suma entre la cantidad total comprada (es decir, vendida) debería ser equivalente a sumar la multiplicación de cada par de precios y la cantidad a la que cada proveedor pudo vender su mercancía y dividirla por la cantidad total comprada (es decir, vendida).

3 Introducción a la teoría de agrupamientos

3.1 Definición formal del objeto pool

Definimos matemáticamente un pool como la terna (P, q, p), donde P es el conjunto de agentes agrupados, q la cantidad total demandada (u ofrecida) conjuntamente de un bien dado y p el precio de referencia que este agrupamiento en conjunto está dispuesto a pagar (cobrar) para obtener (vender) dicho bien.

El parámetro p podría obtenerse con un algoritmo de negociación con el fin de obtener un precio de equilibrio acordado entre todos los agentes del pool.

Definimos un pool de ventas como una agrupación de proveedores que se han unido para poder suministrar la cantidad necesaria de un bien específico; y como pool de compras a un grupo de consumidores que se han unido para obtener la cantidad individual de mercadería necesaria a un precio preestablecido.

Definición 1. Un pool es una terna (A, q, p) tal que:

$$(A,q,p) = \begin{cases} A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} : a_i \ es\ un\ agente\ de\ (A,q,p)\ \forall\ i \in I = \{1,2,...,n\} \\ q = \sum_{i=1}^{n} q_i :\ q_i := cantidad\ individual\ requerida/ofrecida\ por\ el\ agente\ i; q \in \mathbf{N}. \\ p := precio\ al\ cual\ los\ agentes\ están\ dispuestos\ a\ comprar/vender\ un\ bien; p \in \Re^{+}. \end{cases}$$

3.2 El pool vacío

$$\varnothing_P = (A,q,p) : \begin{cases} A = \varnothing \\ q = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

3.3 Operaciones entre pooles

Debe definirse el tratamiento del componente de precio (p) en la terna (A, q, p). Este componente podría representar el promedio ponderado entre los precios deseados por cada agente del pool, o un precio preacordado.

Aquí, si se trata de un pool de compras, el precio considerado es el precio más bajo buscado por los agentes de este pool, ya que es el que se supone que no excluye a ningún miembro comprador. Dualmente, el precio considerado en un pool de ventas es el precio más alto entre todos los vendedores, ya que esto asegura que todos los proveedores del producto estén incluidos.

Hay dos universos de pooles; los de compras y los de ventas. Para fines de modelado y simplificación, se presume que estos universos son disjuntos, ya que un modelo de asignación debe vincular a los compradores con los vendedores, y para una operación en particular, cada agente actúa como comprador o como vendedor, y no en ambos roles simultáneamente. Por lo tanto, las operaciones entre dos o más grupos siempre ocurren cuando todos los operandos son de la misma naturaleza (es decir, las uniones, intersecciones y otras operaciones se definen en esta sección solo entre pooles de compra o venta puros, y no mixtos).

3.4 Unión de varios pooles

$$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i, q_i, p_i) = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \\ p = max_{i=1}^{n}(p_i)\ \forall\ pool\ de\ venta\ \veebar \\ p = min_{i=1}^{n}(p_i)\ \forall\ pool\ de\ compra \end{cases}$$

3.5 Intersección de pooles

$$\bigcap_{i=1}^{n}(A_i, q_i, p_i) = \begin{cases} \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \forall i : a_i \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i, q_i, p_i) \\ p = max_{i=1}^{n}(p_i)\ \forall i : a_i \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i, q_i, p_i),\ \forall\ pool\ de\ venta\ \veebar \\ p = min_{i=1}^{n}(p_i)\ \forall i : a_i \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i, q_i, p_i),\ \forall\ pool\ de\ compra \end{cases}$$

3.6 Complemento relativo entre pooles

$$(A_1, q_1, p_1) \diagdown (A_2, q_2, p_2) = \begin{cases} A_1 \diagdown A_2 \\ q_1 - q_2 \\ p_1 \end{cases}$$

3.7 Subconjunto de un pool

$$(A_1, q_1, p_1) \subseteq (A_2, q_2, p_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1, q_1, p_1), (A_2, q_2, p_2)\ ambos\ pooles\ de\ compra\ o\ venta. \\ A_1 \subseteq A_2 \\ q_1 \leq q_2 \\ p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow (A_1, q_1, p_1), (A_2, q_2, p_2)\ son\ pooles\ de\ venta\ \veebar \\ p_1 \geq p_2 \Leftrightarrow (A_1, q_1, p_1), (A_2, q_2, p_2)\ son\ pooles\ de\ compra \end{cases}$$

3.8 Ínfimos y supremos para comparar dos pooles

Dado que un pool es una terna, es posible definir tres operaciones de supremo y tres de ínfimo, guiadas por cardinalidad, cantidad y precio entre los pooles.

Para estas operaciones tiene sentido operar entre pooles de compras (el conjunto de partida) y de ventas (el conjunto de llegada), a diferencia de las operaciones definidas en el apartado anterior. De hecho, tiene sentido saber si un pool de compras es de un tamaño o cantidad menor o igual que un pool de ventas, para saber si el pool de proveedores tendrá stock suficiente para cubrir toda la operación del mercado. Lo mismo ocurre con el precio. Es útil saber si el precio por el que los compradores están dispuestos a comprar un bien es compatible con el precio por el que los vendedores están dispuestos a venderlo.

3.9 Ínfimo cardinal

Sean (A_1, q_1, p_1) y (A_2, q_2, p_2) dos pooles cualesquiera. Entonces, la operación binaria denotada como $\wedge_{\#}$ es el mínimo ínfimo entre ellos, tal que:

$$(A_1, q_1, p_1) \wedge_{\#} (A_2, q_2, p_2) = (A_1, q_1, p_1) \Leftrightarrow |A_1| \leq |A_2|$$

3.10 Supremo cardinal

La operación binaria denotada como $\vee_{\#}$ es el supremo cardinal entre pooles:

$$(A_1, q_1, p_1) \vee_{\#} (A_2, q_2, p_2) = (A_1, q_1, p_1) \Leftrightarrow |A_1| \geq |A_2|$$

3.11 Ínfimo cuantitativo

La operación binaria denotada $\wedge_q$ compara las cantidades entre esos pooles:

$$(A_1, q_1, p_1) \wedge_q (A_2, q_2, p_2) = (A_1, q_1, p_1) \Leftrightarrow q_1 \leq q_2$$

3.12 Supremo cuantitativo

$$(A_1, q_1, p_1) \vee_q (A_2, q_2, p_2) = (A_1, q_1, p_1) \Leftrightarrow q_1 \geq q_2$$

3.13 Ínfimo de precios

$$(A_1, q_1, p_1) \wedge_p (A_2, q_2, p_2) = (A_1, q_1, p_1) \Leftrightarrow p_1 \leq p_2$$

3.14 Supremo de precios

$$(A_1, q_1, p_1) \vee_p (A_2, q_2, p_2) = (A_1, q_1, p_1) \Leftrightarrow p_1 \geq p_2$$

3.15 El álgebra de pooles

$$\langle X = \{(A, q, p) : A = \{a_1, ..., a_n\}, q \in \mathbf{N}, p \in \Re^+\}, \cup, \cap, \setminus, \subseteq, \vee_{\#}, \wedge_{\#}, \vee_q, \wedge_q, \vee_p, \wedge_p, \varnothing_P \rangle$$

4 Conclusiones

Se ha establecido un método informático y matemático para modelar una plataforma de mercado bilateral digital para el comercio de productos en pooles (grupos de compradores y/o vendedores), que se agrupan con el fin de sumar poder adquisitivo (consumidores) y reducir los costos operativos (proveedores).

Operar en pooles no es nuevo. Así como los grupos de siembra y los pooles de energía son frecuentes, ahora los pooles de minería de criptomonedas están en auge. El problema de la compra y venta en grupos es la escalabilidad.

Al generar las herramientas matemáticas adecuadas, es posible modelar una plataforma informática que facilite agregaciones a gran escala en ambos lados del mercado. Este modelado, a través de objetos matemáticos y la proposición de un algoritmo de asignación entre ellos, ha sido el propósito de este trabajo, demostrando la viabilidad de construir este tipo de mercados bilaterales.

Adicionalmente, en este artículo se realizó una introducción a la Teoría de pooles o agrupamientos, delineada mediante el modelado matemático de los pooles de compras y ventas en entornos mercantiles cooperativos, y la definición de un álgebra de operaciones y emparejamientos entre diferentes pooles, útil para describir un mercado digital para compras y ventas cooperativas.

Por tanto, el otro objetivo de este artículo ha sido brindar al lector una inmersión a la Teoría de Pooles, con lo que nace un campo de estudio que tiene aplicaciones en el modelado de mercados cooperativos, pooles de siembra y de minería de criptomonedas; pero también en cualquier conformación natural (bacteriana, planetaria, etc.) en la que se describan clústeres de entidades, donde el parámetro p de la terna $(A,\ q,\ p)$ puede representar un peso específico conjunto, un indicador descriptivo de la agrupación, o un promedio ponderado.

Hemos proporcionado la formalización de un pool, considerándolo y definiéndolo como un objeto matemático. Una vez creada la estructura, se han definido operaciones entre pooles, como intersección, unión, subconjunto, ínfimo, supremo y complemento relativo, con las cuales hemos definido un Álgebra de Pooles.

Aunque el universo ordenado de pooles se ha definido como una estructura algebraica, es posible suponer que pueda representar estructuras de datos, estructuras económicas o estructuras naturales que se encuentran en la vida real.

De particular importancia es el estudio del comportamiento de los agrupamientos en los juegos de asignación restringidos muchos-a-muchos en mercados bilaterales reticulares. Es posible definir un mercado electrónico que asigne o empareje grupos de compras con grupos de ventas para un producto específico.

Los pooles y el cooperativismo van de la mano, y para estudiarlos, el foco debe estar en el homomorfismo de emparejamiento entre pooles, que relaciona pooles de compra con pooles de venta y preserva su estructura.

Consideramos que a través de este artículo se han sentado las bases matemáticas para la construcción de esta plataforma digital, y el posterior estudio de las interacciones y propiedades matemáticas que surgen entre pooles.

Teoría de agrupamientos y algoritmos de asignación muchos-a-muchos en mercados bilaterales

Juan Marcos Tripolone
Universidad de Congreso, Argentina
juanmarcos418@profesores.ucongreso.edu.ar

Se pretende proponer un modelo matemático de emparejamientos muchos-a-muchos en mercados reticulares, para resolver el problema de la compraventa simultánea en forma cooperativa (grandes grupos de pequeños compradores simultáneos del mismo bien en la misma ubicación, y grandes grupos de pequeños proveedores que deben agruparse para cubrir transacciones de mucho volumen) a través de un mercado bilateral.

Modelo resumido:

$$((B, q_B, p_B), (S, q_S, p_S), P, X) = \begin{cases} B = \{b_1, ..., b_i, ..., b_n\} : b_i = (q_{b_i}, p_{b_i}, t_{b_i}) \ \forall \ i \in I = \{1, ..., n\} \\ S = \{s_1, ..., s_i, ..., s_m\} : s_i = (q_{s_i}, p_{s_i}, t_{s_i}) \ \forall \ i \in I = \{1, ..., m\} \\ P := Plataforma \ de \ asignaciones \ bilaterales \\ X \subseteq B \times S \end{cases}$$

Conjunto de asignaciones posibles:

$X = \{x_1, ..., x_i, ..., x_n\} : x_i = (b_j, s_k) \in X \Leftrightarrow p_{b_j} \geq p_{s_k}$

$|X| \leq |B| \cdot |S|$

Condiciones de ordenamiento para preasignaciones entre compradores y vendedores:

$Ord_B = \{\{b_1, ..., b_i, ..., b_n\} : b_i = (q_{b_i}, p_{b_i}, t_{b_i})/(p_{b_i} < p_{b_{i+1}}) \veebar [(p_{b_i} = p_{b_{i+1}}) \wedge (q_{b_i} > q_{b_{i+1}})] \veebar [(p_{b_i} = p_{b_{i+1}}) \wedge (q_{b_i} = q_{b_{i+1}}) \wedge (t_{b_i} < t_{b_{i+1}})] \ \forall \ i \in I\}$ $Ord_S = \{\{s_1, ..., s_i, ..., s_n\} : s_i = (q_{s_i}, p_{s_i}, t_{s_i})/(p_{s_i} < p_{s_{i+1}}) \veebar [(p_{s_i} = p_{s_{i+1}}) \wedge (q_{s_i} > q_{s_{i+1}})] \veebar [(p_{s_i} = p_{s_{i+1}}) \wedge (q_{s_i} > q_{s_{i+1}}) \wedge (t_{s_i} < t_{s_{i+1}})] \ \forall \ i \in I\}$

Conjunto de agentes no asignados:

$U = X^C = \{(b_i, \varnothing), (\varnothing, s_j)\}$

Condiciones y restricciones cuantitativas:

$$QR:\begin{cases} q_{B\to S}\le q_S \\ q_{B\to S}\le q_B \\ q_S=\sum_{j=1}^{m} q_{s_j}=\sum_{j=1}^{m}(q_{s_{j_X}}+q_{s_{j_R}}) \\ q_B=\sum_{i=1}^{n} q_{b_i}=\sum_{i=1}^{n}(q_{b_{i_X}}+q_{b_{i_R}}) \\ q_{s_{j_X}(b_i)}\le q_{s_{j_X}}\le q_{s_j}\forall\ b_i\in S_{b_i} \\ q_{b_{i_X}(s_j)}\le q_{b_{i_X}}\le q_{b_i}\forall\ s_j\in B_{s_j} \\ q_{s_{j_X}}=\sum_{i=1}^{n} q_{s_{j_X}(b_i)}, b_i\in S_{b_i} \\ q_{b_{i_X}}=\sum_{j=1}^{m} q_{b_{i_X}(s_j)}, s_j\in B_{s_j} \\ q_{s_{j_X}(b_i)}=q_{b_{i_X}(s_j)}\ (simetr\acute{\imath}a\ ) \\ q_{s_{j_R}}=q_{s_j}-q_{s_{j_X}} \\ q_{b_{i_R}}=q_{b_i}-q_{b_{i_X}} \\ q_{s_{j_R}}=q_{s_j}, q_{s_{j_X}}=0\Leftrightarrow(\varnothing,s_j)\in U \\ q_{b_{i_R}}=q_{b_i}, q_{b_{i_X}}=0\Leftrightarrow(b_i,\varnothing)\in U \\ q_{B\to S}=\sum_{i=1}^{n} q_{b_{i_X}}=\sum_{j=1}^{m} q_{s_{j_X}} \end{cases}$$

Conjunto de agentes parcialmente asignados:

$P=\{b_i: q_{b_{i_X}}<q_{b_i}, s_j: q_{s_{j_X}}<q_{s_j}\}$

Condiciones y restricciones de precios:

$$PR=\begin{cases} p_{b_{i_X}}\ge p_{b_i}\forall\ b_i\in B \\ p_{s_{j_X}}\le p_{s_j}\forall\ s_j\in S \\ b_i\in B_{s_j}\Leftrightarrow p_{b_{i_X}}\ge p_{s_{j_X}} \\ s_j\in S_{b_i}\Leftrightarrow p_{s_{j_X}}\le p_{b_{i_X}} \end{cases}$$

Precio promedio de asignación para un comprador:

$$\overline{p_{b_i}}=\frac{\sum_{j=1}^{m} p_{s_{j_X}(b_i)}\cdot q_{s_{j_X}(b_i)}}{q_{b_{i_X}}}(1)$$

Precio promedio de asignación para un vendedor:

$$\overline{p_{s_j}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{b_{i_X}(s_j)}\cdot q_{b_{i_X}(s_j)}}{q_{s_{j_X}}}(2)$$

Precio promedio general al cierre de operaciones:

$$\overline{p_{B\to S}}=\frac{\sum_{i=1}^{n} p_{b_{i_X}}\cdot q_{b_{i_X}}}{q_{B\to S}}=\frac{\sum_{j=1}^{m} p_{s_{j_X}}\cdot q_{s_{j_X}}}{q_{B\to S}}(3)$$

Las tecnologías de la información y la comunicación han hecho posible y escalable la cooperativización en las economías digitales. Es natural que los pequeños agentes económicos se agrupen para formar un cluster o consorcio (aquí denominado "pool", para aclarar la naturaleza efímera de este asociativismo no perenne, sino circunstancial), en la inteligencia de interactuar conjuntamente en un mercado definido. Se procura probar la existencia de un álgebra subyacente que modela y delinea un grupo de compradores o vendedores como un objeto matemático y define operaciones entre estos agrupamientos de agentes. Dichas operaciones se encuentran circunscriptas dentro de un álgebra de agrupaciones, constituyendo así un conjunto de propiedades y leyes dentro de este espacio algebraico, que denominaremos "Teoría de agrupamientos" o "Teoría de pooles".

Definición formal del objeto pool:

$$(A,q,p) = \begin{cases} A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} : a_i \text{ } es \text{ } un \text{ } agente \text{ } de \text{ } (A,q,p) \ \forall \ i \in I = \{1,2,...,n\} \\ q = \sum_{i=1}^{n} q_i : \ q_i := cantidad \text{ } individual \text{ } requerida/ofrecida \text{ } por \text{ } el \text{ } agente \text{ } i; q \in \mathbf{N}. \\ p := precio \text{ } al \text{ } cual \text{ } los \text{ } agentes \text{ } están \text{ } dispuestos \text{ } a \text{ } comprar/vender \text{ } un \text{ } bien; p \in \Re^+. \end{cases}$$

El pool vacío:

$$\varnothing_P = (A,q,p) : \begin{cases} A = \varnothing \\ q = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

Unión de dos pooles:

$$(A_1,q_1,p_1) \cup (A_2,q_2,p_2) = \begin{cases} A_1 \cup A_2 \\ q_1 + q_2 \\ p = max(p_1,p_2) \ \forall \ pool \text{ } de \text{ } venta \ \veebar \\ p = min(p_1,p_2) \ \forall \ pool \text{ } de \text{ } compra \end{cases}$$

Unión de varios pooles:

$$\bigcup_{i=1}^{n}(A_i,q_i,p_i) = \begin{cases} \bigcup_{i=1}^{n} A_i \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \\ p = max_{i=1}^{n}(p_i) \ \forall \ pool \text{ } de \text{ } venta \ \veebar \\ p = min_{i=1}^{n}(p_i) \ \forall \ pool \text{ } de \text{ } compra \end{cases}$$

Intersección de pooles:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(A_i,q_i,p_i) = \begin{cases} \bigcap_{i=1}^{n} A_i \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \forall i : a_i \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i,q_i,p_i) \\ p = max_{i=1}^{n}(p_i) \ \forall i : a_i \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i,q_i,p_i), \ \forall \ pool \text{ } de \text{ } venta \ \veebar \\ p = min_{i=1}^{n}(p_i) \ \forall i : a_i \in \bigcap_{i=1}^{n}(A_i,q_i,p_i), \ \forall \ pool \text{ } de \text{ } compra \end{cases}$$

Complemento relativo entre pooles:

$$(A_1,q_1,p_1) \diagdown (A_2,q_2,p_2) = \begin{cases} A_1 \diagdown A_2 \\ q_1 - q_2 \\ p_1 \end{cases}$$

Subconjunto de un pool:

$$(A_1,q_1,p_1) \subseteq (A_2,q_2,p_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (A_1,q_1,p_1),(A_2,q_2,p_2) \text{ } \textit{ambos pooles de compra o venta.} \\ A_1 \subseteq A_2 \\ q_1 \leq q_2 \\ p_1 \leq p_2 \Leftrightarrow (A_1,q_1,p_1),(A_2,q_2,p_2) \text{ } \textit{son pooles de venta} \veebar \\ p_1 \geq p_2 \Leftrightarrow (A_1,q_1,p_1),(A_2,q_2,p_2) \text{ } \textit{son pooles de compra} \end{cases}$$

Ínfimo cardinal:

$(A_1,q_1,p_1) \wedge_{\#} (A_2,q_2,p_2) = (A_1,q_1,p_1) \Leftrightarrow |A_1| \leq |A_2|$

Supremo cardinal:

$(A_1,q_1,p_1) \vee_{\#} (A_2,q_2,p_2) = (A_1,q_1,p_1) \Leftrightarrow |A_1| \geq |A_2|$

Ínfimo cuantitativo:

$(A_1,q_1,p_1) \wedge_q (A_2,q_2,p_2) = (A_1,q_1,p_1) \Leftrightarrow q_1 \leq q_2$

Supremo cuantitativo:

$(A_1,q_1,p_1) \vee_q (A_2,q_2,p_2) = (A_1,q_1,p_1) \Leftrightarrow q_1 \geq q_2$

Ínfimo de precios:

$(A_1,q_1,p_1) \wedge_p (A_2,q_2,p_2) = (A_1,q_1,p_1) \Leftrightarrow p_1 \leq p_2$

Supremo de precios:

$(A_1,q_1,p_1) \vee_p (A_2,q_2,p_2) = (A_1,q_1,p_1) \Leftrightarrow p_1 \geq p_2$

El álgebra de pooles:

$\langle X = \{(A,q,p) : A = \{a_1,...,a_n\}, q \in \mathbf{N}, p \in \Re^+\}, \cup, \cap, \diagdown, \subseteq, \vee_{\#}, \wedge_{\#}, \vee_q, \wedge_q, \vee_p, \wedge_p, \varnothing_P \rangle$

Los juegos de asignación en la cadena de subcontratación internacional de servicios también se pueden modelar como un problema de coincidencia muchos-a-muchos entre agentes agrupados. La cadena de valor global tiene como objetivo capilarizar los procesos de búsqueda y subcontratación del talento (deslocalización y subcontratación de personal) y, al mismo tiempo, tercerizar los riesgos hacia abajo en la cadena. Estos riesgos incluyen la desactivación del contrato, el despido brusco de un determinado trabajador (por mal desempeño o por una nueva oferta laboral) entre otros, lo que motiva a la cadena de subcontratación a crecer indefinidamente. Se procura abordar este problema matemáticamente desde los Juegos de Asignación y los conjuntos ordenados, con el fin de estudiar el esquema de contratación en grandes cadenas de contratistas.

La cadena de contratistas desde la óptica de la teoría de conjuntos:

$D_X = \{d_{x_1}, d_{x_2}, ..., d_{x_d}\} \subseteq D \ (\#D_X = d)$
$C_X = \{d_{x_1}, d_{x_2}, ..., d_{x_d}, c_{x_1}, c_{x_2}, ..., c_{x_c}\} \subseteq C$
$(C_X \in \wp(C), \#C_X = \#D + c = d + c)$
$B_X = \{d_{x_1}, d_{x_2}, ..., d_{x_d}, c_{x_1}, c_{x_2}, ..., c_{x_c}, b_{x_1}, b_{x_2}, ..., b_{x_b}\} \subseteq B$
$(B_X \in \wp(B), \#B_X = \#D + \#C + b = d + c + b)$
$X = \{d_{x_1}, d_{x_2}, ..., d_{x_d}, c_{x_1}, c_{x_2}, ..., c_{x_c}, b_{x_1}, b_{x_2}, ..., b_{x_b}, x_1, x_2, ..., x_r\} \subseteq A$
$(X \in \wp(A), \#X = \#D + \#C + \#B + r = d + c + b + r)$
$\therefore \langle \wp(A), \subseteq \rangle : D_X \subseteq C_X \subseteq B_X \subseteq X \subseteq A$

Modelado de una sola cadena de contratación directa:

$A_0 = '\text{Empresa contratante}' = \{a_{01}, a_{02}, ..., a_{0x}, a_{11}, a_{12}, ..., a_{1b}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2b},$
$a_{31}, a_{32}, ..., a_{3c}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}\}$

$A_1 = '\text{Contratista directo (1-contratista)}' = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1b}, a_{21}, a_{22}, ..., a_{2b},$
$a_{31}, a_{32}, ..., a_{3c}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}\}$

$A_2 = '\text{Subcontratista (2-contratista)}' = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2b}, a_{31}, a_{32}, ..., a_{3c}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}\}$

$A_3 = '\text{Sub-subcontratista (3-contratista)}' = \{a_{31}, a_{32}, ..., a_{3c}, ..., a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}\}$

$\vdots$

$A_n = {}'$Sub-...-subcontratista (n-contratista)$' = \{a_{n1}, a_{n2}, ..., a_{nm}\}$

Cadena de contratación simple:

$A_n \subseteq A_{n-1} \subseteq ... \subseteq A_i \subseteq ... \subseteq A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1 \subseteq A_0 \ \forall \ i \in I = \{1, 2, ..., n\}$

$A_n \cup A_{n-1} \cup ... \cup A_i \cup ... \cup A_3 \cup A_2 \cup A_1 = A_0 \ \forall \ i \in I = \{1, 2, ..., n\}$

El operador contractual y el álgebra de contrataciones:

$A, B, C \subseteq X \Rightarrow$

(i) $A \mapsto B, B \mapsto C \Rightarrow A \mapsto C$ (transitividad)

(ii) $A \mapsto B \Leftrightarrow B \mapsto A$ (simetría)

(iii) $(A \mapsto B) \mapsto C = A \mapsto (B \mapsto C)$ (asociatividad)

(iv) $A \mapsto A$ (reflexividad)

(v) $\forall X, \forall A \subseteq X, \exists \upharpoonleft : A \mapsto \upharpoonleft = A$ (elemento neutro)

El objetivo de esta algebrización es representar matemáticamente estos problemas, para estudiar e interpretar mejor las asignaciones en las cadenas contractuales de servicios muy largas, o bien, encontrar asignaciones óptimas y estables entre compradores y vendedores concurrentes de un mismo producto, agrupados en un mercado bilateral común.
