

XIII Jornadas de Investigación y Segundo Encuentro de Investigadores en Psicología del Mercosur. Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires, 2006.

Errores recurrentes en el aprendizaje del álgebra lineal y registros de representación semiótica.

Sara, Alicia, Scardigli, Mónica, Pustilnik, Isabel, Cittadini, Gloria y Pano, Carlos Oscar.

Cita:

Sara, Alicia, Scardigli, Mónica, Pustilnik, Isabel, Cittadini, Gloria y Pano, Carlos Oscar (2006). *Errores recurrentes en el aprendizaje del álgebra lineal y registros de representación semiótica. XIII Jornadas de Investigación y Segundo Encuentro de Investigadores en Psicología del Mercosur. Facultad de Psicología - Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires.*

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/000-039/319>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/e4go/waq>

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.

ERRORES RECURRENTES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA LINEAL Y REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Sara, Alicia; Scardigli, Mónica; Pustilnik, Isabel; Cittadini, Gloria; Pano, Carlos Oscar
Facultad Regional Buenos Aires, UTN. UBACyT, Facultad de Psicología, Universidad de Buenos Aires

RESUMEN

Se presenta un análisis, en relación con el uso de diferentes registros de representación semiótica, de los errores cometidos en un examen parcial por estudiantes tecnológicos en la resolución de problemas de Álgebra Lineal y Geometría Analítica. El interés deriva de que este análisis provee información acerca de cómo se construye el conocimiento. Se exponen las características de Álgebra Lineal y Geometría Analítica como disciplina de la ciencia matemática, sus potencialidades para encarar diversos problemas y las dificultades para su aprendizaje. Se presentan elementos teóricos sobre registros de representación semiótica desde la perspectiva de algunos autores. Se concluye en que una enseñanza que propicie la diversificación de registros de representación posibilitaría el establecimiento de redes de conexión entre ellos, para que el alumno pueda acceder al concepto independizándolo de su contexto de representación, generalizándolo a otros para así potenciar la significatividad de su aprendizaje.

Palabras clave

Errores Aprendizaje Álgebra Registros

ABSTRACT

SYSTEMATIC ERRORS IN THE LEARNING OF LINEAR ALGEBRA AND REGISTRIES OF SEMIOTIC REPRESENTATION

We submit an analysis, related to the use of different registries of semiotic representation of the errors committed in the resolution of problems of Linear Algebra and Analytical Geometry by Technology students in a mid-term examination. The interest of the study derives from the fact that this analysis provides information regarding how knowledge is constructed. We describe the characteristics of Linear Algebra and Analytical Geometry as disciplines of the mathematical science; their potential to solve different problems and the difficulties involved in their learning. Theoretical elements about registries of semiotic representation from the perspective of some authors are also presented. We conclude that a teaching strategy that fosters the diversification of representation registries would help establish network connections among them, allowing students to access the concept independently of its context of representation and generalize it to other contexts, thus harnessing the significance of their learning.

Key words

Errors Learning Algebra Registries

INTRODUCCIÓN

Los diseños curriculares de todas las especialidades de la carrera de Ingeniería, en la Universidad Tecnológica Nacional, contienen la asignatura Álgebra y Geometría Analítica. Esta asignatura tiene el carácter de homogénea, es decir es común a todas las especialidades, y junto con otras de ciencias básicas se imparte en el primer nivel. En la Facultad Regional Buenos Aires tiene una carga horaria de diez horas semanales durante un cuatrimestre. El contenido medular del curso consiste en una introducción al Álgebra Lineal y al tratamiento de la Geometría Analítica desde un enfoque vectorial. Los contenidos conceptuales principales son: recta y plano; matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales; teoría axiomática de espacios vectoriales; transformaciones lineales; autovalores y autovectores; diagonalización de matrices simétricas; cónicas y cuádricas.

Nuestra práctica docente nos permitió conjeturar que existe cierta regularidad en los errores que cometen los alumnos al resolver problemas de Álgebra Lineal y Geometría Analítica. En este trabajo analizamos la relación entre los errores recurrentes detectados en las evaluaciones y el uso por parte de los estudiantes de los distintos registros de representación semiótica adecuados para tratar los objetos matemáticos del Álgebra Lineal. La intención que nos guía es, a partir del análisis de las dificultades, proponer algunos cambios en las prácticas docentes que contribuyan a superar dichas dificultades favoreciendo el aprendizaje de los alumnos y la regulación de los procesos de enseñanza.

El análisis de los errores cometidos por los alumnos en su proceso de aprendizaje del Álgebra Lineal puede proveer de una rica información acerca de cómo se construye el conocimiento, así como del estado en que éste se encuentra, imprescindible a la hora de realimentar el proceso de aprendizaje con el fin de mejorar los resultados. Los procesos mentales no son visibles, y sólo es posible conjeturar su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas. Los errores, la regularidad con que éstos aparecen, los patrones comunes a que obedecen, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de estos procesos mentales, y acerca de las estructuras en que se van organizando los conocimientos.

UNA CUESTIÓN METODOLÓGICA

Trabajamos con una muestra de exámenes parciales de tamaño noventa y cuatro. Las unidades seleccionadas para conformar la muestra corresponden a tres cursos del primer cuatrimestre de 2005 y se obtuvieron por muestreo estratégico (Cea D'Ancona, 1998:200-201) por ser éste un estudio fundamentalmente cualitativo de indagación exploratoria. El relevamiento de errores se efectuó sobre los problemas del examen que enunciamos más adelante. Los problemas fueron seleccionados por su importancia conceptual dentro de la asignatura y por el manejo de diferentes registros que implica su resolución. Los exámenes fueron rendidos por alumnos de la Facultad Regional Buenos Aires de la Universidad Tecnológica Nacional que cursaron la asignatura que nos ocupa.

LA ASIGNATURA ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

El Álgebra Lineal tiene en nuestra época un carácter básico, por ser una disciplina que permite organizar información en cualquier contexto, discreto o continuo, y establecer un puente entre el Álgebra y la Geometría. Esta asignatura brinda al alumno universitario la posibilidad de encontrarse con una teoría matemática estructurada a partir de un conjunto de axiomas que sintetizan las propiedades fundamentales de variados conjuntos de objetos, y de realizar cálculos no triviales - aunque tampoco excesivamente complejos - sobre modelos más o menos realistas de muchos fenómenos que tienen interés en ciencias e ingeniería. Los conceptos del álgebra lineal, por su naturaleza *fugs* (Rogalski, 1998: 5-7) (formalizadores, unificadores, generalizadores, simplificadores), al combinarse con la perspectiva geométrica y la capacidad de cálculo de las computadoras y calculadoras científicas actuales, permiten tratar en los primeros años de la formación de grado problemas interesantes. El valor propio de la asignatura y la multiplicidad de enfoques y aplicaciones que ofrece, plantean al docente motivadores desafíos a la hora de proponer una planificación del curso, seleccionar las actividades que realizarán los estudiantes y formular estrategias didácticas. No obstante se debe reconocer que los temas del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica continúan siendo conocimientos de difícil aprendizaje para la mayoría de los alumnos. Esto es fundamentalmente por "la naturaleza misma del Álgebra Lineal (dificultades conceptuales) y el tipo de pensamiento necesario para su comprensión (dificultades cognitivas)" (Dorier y Sierpinska, 2000: 2). Estos dos aspectos son a menudo inseparables en el proceso real de aprendizaje.

REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Goldin (1998: 135-165) presenta la noción de sistemas de representación y sus diversos tipos como el constructo clave de un modelo psicológico unificado del aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos.

Para Duval (1995: 18), un *sistema semiótico* es un conjunto de signos y reglas construido con el fin de representar objetos. Los signos son las unidades elementales del sistema; las reglas rigen las asociaciones de los signos. Los *registros de representación semiótica* son sistemas semióticos que permiten cumplir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis, a saber:

1. *La formación de una representación identificable, una marca o conjunto de marcas perceptibles* que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema: enunciación de una frase, dibujo de una figura geométrica, escritura de una fórmula.

2. *El tratamiento*, que consiste en la transformación de una representación en el registro mismo donde ha sido producida y utilizando las reglas propias al sistema, de modo de obtener otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Se trata de una *transformación interna* al registro: la inferencia es una forma de tratamiento en lengua natural, así como el cálculo es una forma de tratamiento propia de las escrituras simbólicas.

3. *La conversión*, que es la transformación de una representación en un sistema en una representación de otro registro de otro sistema, de manera tal que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado. La conversión es una *transformación externa* al registro de partida: la ilustración es la conversión de una representación, por ejemplo, lingüística en una representación figural; el gráfico de una función definida mediante una fórmula es una conversión del registro algebraico al registro gráfico.

El lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc. son registros de representación semiótica. El lenguaje morse y la codificación de tránsito, no lo son.

Para ser más explícitos: todo objeto matemático requiere de un *"representante"* (*representante semiótico*), no solo para los fines comunicacionales sino para que podamos operar sobre él y realizar nuevas construcciones. Y el trato que le demos y las operaciones que realicemos con él dependerá del *"sistema de representación"* (*semiótica*) que elijamos. Por lo tanto, aquí hay un doble juego, mencionado por Duval (1997: 175): "la aprehensión de los objetos matemáticos no puede ser otra cosa que una aprehensión conceptual", pero solamente por medio de las representaciones es posible realizar alguna actividad sobre los objetos matemáticos. En este sentido, las diferentes representaciones semióticas de un objeto matemático son imprescindibles. Según Duval (1997: 173), "el contenido conceptual es como el invariante de múltiples representaciones semióticas".

Alves Dias distingue, en el Álgebra Lineal, cuatro registros de representación semiótica: la *representación simbólica intrínseca*, la *representación por coordenadas*, la *representación mediante ecuaciones* y la *representación matricial*. (Dorier, 1997: 276-277). A estos cuatro registros inherentes al Álgebra Lineal, hay que agregarle el *registro de la lengua natural*, que está presente en cualquier ámbito dentro del pensamiento humano. Duval (1995: 36-41) le asigna un rol preponderante en la enseñanza de la Matemática, cuando habla de la conversión lengua natural - registro simbólico.

Teniendo en cuenta la variedad de registros que coexisten en el Álgebra Lineal, la facilidad con que los alumnos sean capaces de realizar conversiones entre los distintos registros resulta crucial para el logro de un aprendizaje altamente significativo de la asignatura. Sin embargo, en general, la actividad de conversión no es tan inmediata ni tan espontánea como podría creerse. Según Duval (1995: 36-38), numerosas observaciones muestran que el tiempo de tratamiento y la posibilidad de efectuar una conversión adecuada, dependen del grado de *congruencia* entre dos representaciones. Duval (1995: 39) dice que dos representaciones son congruentes cuando se verifican las siguientes condiciones:

1) *La correspondencia semántica* de los elementos significativos: a cada unidad significativa simple de una de las representaciones, se puede asociar una unidad significativa elemental. Se considera como unidad significativa elemental toda unidad que depende del "léxico" de un registro".

2) *La univocidad semántica terminal*: a cada unidad significativa elemental de la representación de salida, le corresponde una única unidad significativa elemental en el registro de la representación de llegada.

3) *La correspondencia en el orden* en la aprehensión de las unidades que componen cada una de las dos representaciones.

La dificultad en efectuar conversiones entre registros e incluso en el tratamiento entre diferentes representaciones dentro de un mismo registro, depende del grado de no-congruencia entre la representación de salida y la de llegada (Duval, 1995: 39).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LOS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

El primer problema del examen parcial considerado pide que dadas las ecuaciones paramétricas de una recta L en el espacio tridimensional, el alumno halle la proyección de un punto A de coordenadas conocidas (registro tabular) sobre L.

Este problema resulta interesante en cuanto a la detección de errores relacionados con distintos aspectos de los registros de representación. El error que se detectó con mayor frecuencia - en alrededor del 50% de los casos - es que los alumnos resolvían el problema aplicando una fórmula incorrecta: la que permite calcular la proyección de un vector sobre otro. Se nos ocurren dos explicaciones para este fenómeno: una primera consiste en conjeturar que la palabra "proyección" activa un proceso de búsqueda en la memoria del alumno, de una fórmula. El alumno encuentra la fórmula más conocida de

proyección de un vector sobre la dirección de otro vector y ese hallazgo lo lleva a aplicarla automáticamente; una segunda explicación nos hace pensar que el error en la aplicación de una fórmula no pertinente pudo haber sido inducido por el hecho de que el registro tabular (terna ordenada de números reales) se utiliza tanto para vectores como para puntos del espacio de tres dimensiones. Otros alumnos lograron avanzar por un camino correcto dentro del registro geométrico, pero no llegaron a la solución del problema. Entendemos que esto se debe a fallas en el tratamiento dentro del registro en el que trabajaron.

Nos permitimos recomendar, al docente de la materia, trabajar con los estudiantes a partir de este error, en dos niveles: por una parte -además de insistir en la diferencia entre ambas proyecciones- nos parece interesante generar la discusión acerca de en qué condiciones "geométricas" el error cometido deja de ser un error; por otra, se puede estimular la reflexión en un meta-nivel (Rogalski, 1997: 163; Dorier, Robert, Robinet et Rogalski, 1997: 185 -191), acerca de la no congruencia por razones de no univocidad, ya que se emplea el mismo representante para dos objetos diferentes, lo cual conduce a una confusión entre dos tipos de objetos matemáticos (en este caso: punto y vector) que origina frecuentes errores en el estudio de la asignatura.

El segundo problema da la ecuación vectorial paramétrica de una recta L y pide al alumno que defina L como intersección de dos planos.

Dentro del registro de la representación por ecuaciones, Alves Dias explica que, las ecuaciones paramétricas y las cartesianas son dos tipos de representaciones distintas para un mismo objeto matemático: la recta (Dorier, 1997: 276-277).

Analizando las distintas resoluciones presentadas por los alumnos, detectamos una notoria dificultad en el pasaje de la representación paramétrica a la cartesiana. En este caso, se trata de un obstáculo en el tratamiento, dado que se trabaja dentro de un registro único. En general se observa una asimetría en el grado de dificultad para moverse entre ambas representaciones: a los alumnos les resulta más "natural" pasar de las ecuaciones cartesianas a las paramétricas, que en sentido inverso. Entendemos que esto no es casual, sino que nos enfrentamos a un nuevo conflicto de no-congruencia: Dado un par de planos no paralelos (ecuaciones cartesianas), existe una única recta contenida en ambos, cuya representación paramétrica obtienen sin dificultad la mayoría de los estudiantes. Pero en sentido inverso ocurre que dadas las ecuaciones paramétricas de una recta, existen infinitos planos que la contienen (con dos cualesquiera de ellos, la recta queda definida en forma cartesiana). Es un caso de no univocidad dentro del mismo registro de representación ligado a la dificultad señalada.

El tercer problema consiste en analizar la validez de una implicación dada. El condicional expresa que si dos vectores conforman un conjunto linealmente independiente en un espacio vectorial de dimensión mayor que dos, entonces el conjunto de dos combinaciones lineales de esos vectores con coeficientes determinados salvo uno, también es linealmente independiente cualquiera sea el coeficiente indeterminado.

Es un problema de aplicación del concepto de independencia lineal de vectores, concepto central del Álgebra Lineal. Este problema puede resolverse tanto en el *registro simbólico* (en espacio abstracto) como en el *registro de coordenadas o tabular* (con pares ordenados de números reales).

El tratamiento en el registro simbólico está más ligado al concepto de independencia lineal. Entre los alumnos que eligieron el tratamiento dentro de este registro hubo quienes tuvieron fallas de tipo lógico. Esto puede deberse a que la definición de independencia lineal de vectores conlleva una dificultad lógica intrínseca debido a que se expresa con un enunciado proposicional de implicación.

La mayoría de los alumnos eligió trabajar en el registro tabular,

ya que está más vinculado a la operatoria y el tratamiento en él es más sencillo. "Cuando se dispone de un sistema de representación más efectivo en términos operatorios, éste desplazará al menos efectivo" (Godino, 2003: 244) Pensamos que la respuesta, sea correcta o incorrecta, no muestra si ha habido una verdadera construcción del concepto, salvo en el caso de que esté razonablemente fundamentado el procedimiento usado. Esto último ocurrió en el treinta y tres por ciento de los casos.

COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Se consideraron los errores cometidos por los estudiantes en un examen parcial y se los analizó desde la perspectiva de los diferentes *registros de representación semiótica*. Del análisis de los errores se advierte una fuerte regularidad en su producción. El interés en la perspectiva de análisis elegida reside en que consideramos que en buena medida los errores provienen de un insuficiente trabajo con diferentes registros de representaciones (verbal, numérico, algebraico, simbólico, geométrico, gráfico, computacional, etc.) de un objeto. Formulamos la hipótesis de que si se lograra que los alumnos pudieran trabajar con la mayor cantidad posible de registros diferentes de tales objetos, se aumentaría considerablemente la comprensión de los conceptos y, por ende, disminuirían los errores cometidos. Contrariamente a la opinión de Dieudonné (1966:1-2) que aspira a ayudar al estudiante a alcanzar la "intuición de lo abstracto" con un entrenamiento lo más completo posible en la forma abstracta y axiomática de razonar, entendemos que no corresponde, a la hora de diseñar materiales y actividades, atender solamente a las representaciones simbólicas -como suele ocurrir tradicionalmente en la práctica docente- y desechar las representaciones más intuitivas por no ser lo suficientemente "formales". Una enseñanza que propicie la diversificación de registros de representación posibilitaría el establecimiento de redes de conexión entre los objetos, para que el alumno pueda acceder al concepto independizándolo de su representación. En otras palabras: creemos que la confusión entre el objeto y alguna de sus diversas representaciones, propicia, a mediano o largo plazo, una ausencia de comprensión y una imposibilidad de que el mismo pueda ser utilizado fuera del contexto en el que fue aprendido. Bien se dice que la generalización de los aprendizajes es un criterio de su significatividad. "Por conocimiento generalizable debe entenderse aquél que puede aplicarse a diversos contextos, es decir, conocimiento «transcontextualizado» más que «descontextualizado». El significado más potente no es el que no se corresponde con ningún contexto determinado, sino el que se corresponde con el abanico más amplio posible de contextos particulares". (Coll y Onrubia, 2001: 571). La descripción hecha anteriormente sobre el Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, nos hace considerarlos campos propicios para el desarrollo de diversos registros de representación semiótica, tanto en el tratamiento de los objetos como en el pasaje entre registros.

Las representaciones no sólo son necesarias para fines de comunicación, sino que resultan importantes por su valor epistémico. En este sentido la multiplicidad de registros nos facilita el tratamiento de los problemas conceptuales y cognitivos debidos a las dificultades que encuentran los estudiantes en el aprendizaje de la asignatura.

BIBLIOGRAFÍA

- Cea D'ancona (1998). *Metodología Cuantitativa: estrategias y técnicas de investigación social*. Madrid. Editorial Síntesis S. A. 1ª Edición.
- Coll, C., Martín, E. y Onrubia, J. (2001). La evaluación del aprendizaje escolar: dimensiones psicológicas, pedagógicas y sociales. En Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (comp.). *Desarrollo psicológico y educación. 2. Psicología de la educación escolar*. Madrid. Alianza Editorial.
- Dieudonné, J. (1966). *Fundamentos de Análisis Moderno*. Barcelona. Editorial Reverté, S. A.

Dorier, J.L. and Sierpinska, A., (2000), Research into the teaching and learning of linear algebra, en *Derek Holton et al. (eds.), The Teaching and learning of Mathematics at University Level : An ICMI Study, 1-1*, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J.L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (1997), A propos du levier «méta», en Dorier, J. L. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, France, La Pensée Sauvage.

Dorier, J.L.(1997), Présentation de travaux récents in L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, en Dorier, J. L. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, France, La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1997), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento, en *Investigaciones en Matemática Educativa II*, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav -IPN, Ed. Hitt, F., Grupo Editorial Iberoamérica, México.

Duval, R. (1995), Sémiosis et pensée humaine, Peter Lang S.A., Suiza.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de Investigación presentado para optar a la Cátedra de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2).

Rogalski, M. (1997), L'enseignement de l'algèbre linéaire. Experimente a Lille, en *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, Dorier, J. L. (Ed), La Pensée Sauvage.

Rogalski, M., (1998) , Dix ans de recherches françaises sur l'enseignement de l'Algèbre Linéaire en première année d'université scientifique, en <http://www.math.jussieu.fr/~jarraud/colloque/rogalski.pdf>