Trabalho de fim de curso para obtenção de grau de licenciatura em ensino de Matemática.

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PLANO E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS NA 11ª CLASSE.

Victorino Camungo Jaime.

Cita:

Victorino Camungo Jaime (2021). *CONJUNTO DE EXERCÍCIOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PLANO E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS NA 11ª CLASSE*. Trabalho de fim de curso para obtenção de grau de licenciatura em ensino de Matemática.

Dirección estable: https://www.aacademica.org/victorino.jaime/2

ARK: https://n2t.net/ark:/13683/pAAX/Q3e

Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite
https://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/br.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. *Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: https://www.aacademica.org*.

INSTITUTO SUPERIOR DE CIÊNCIAS DE EDUCAÇÃO

ISCED/UÍGE

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXACTAS

SECÇÃO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PLANO E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS NA 11ª CLASSE

Por

VICTORINO CAMUNGO JAIME

Trabalho apresentado para obtenção do grau de Licenciado em Ciências de Educação na opção de Ensino de Matemática

UIGE/2021

VICTORINO CAMUNGO JAIME

CONJUNTO DE EXERCÍCIOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PLANO E SUAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS NA 11ª CLASSE

Orientador: MSc. Kumbo João

Co-tutor: MSc. Venâncio Sebastião Finda

Trabalho apresentado para obtenção do grau de Licenciado em Ciências de Educação na opção de Ensino de Matemática

UIGE/2021

DEDICATÓRIA

É com bastante amor e anseio que dedico este humilde e generoso trabalho, aos meus queridos pais Esteves Mário Savicuta (em memória), pela educação conselhos e incentivos ao estudo e por me ensinar o verdadeiro significado da palavra pai, Pai Eliseu CAtombela que por tudo quanto tem feito e Laurinda Nawape pela amabilidade de me colocar neste mundo e por estar sempre presente em todos momentos de minha vida, dedico-a este trabalho com muito carinho. A minha família em geral e aos meus irmãos Jaime Chivinda Victorino, Rute Jaime Victorino, Kandele Alcibíades Jaime Victorino, Manuel José Victorino, Aristides José Victorino, Roberta José Victorino, Abraão José Victorino, Selma José Victorino, Priscila José Victorino, Ricardo Sande, aos meus filhos Kassadi Manuel dos Santos Kalelessa, Laurinda Carvalho Esteves, Adalberto Carvalho Esteves, Carvalho Esteves, Jorgina Carvalho Esteves, Rute Chilombo Celestino Esteves, Hermenegildo Julino Jamba Esteves as (ao) minhas/meu cunhadas(o) Mário Vasco Jamba, Victorina Ngueve Vasco Jamba e Bernadete Vasco Jamba e a minha companheira Inância Vasco Jamba pela força apoio e incentivo e pelo afecto que tem me proporcionado dia pós dias e ao longo desta jornada, sem esquecer a todos meus colegas desde o ensino primário ao ensino universitário, Custódio Celestino Laurindo, Santos Dongala André, Raul da Silva António, Lic. Nsimba António, Marta Anádia Cambunda Lambi, Ana Maria, Dulce Neves Malundo, Pedro Dikukumuka, Lic. António Tomás.

AGRADECIMENTOS

Ninguém é capaz de atingir patamares consideráveis sem o auxílio daqueles que são considerados os pioneiros daquele que constitui o sonho aspirado.

O presente trabalho não teria a sua concretização se não contasse com a contribuição dos préstimos de outros pensadores.

A minha gratidão vai primeiramente a Deus, o detentor de toda a sabedoria.

Agradeçco ao meu Tutor Mestre Kumbo João por todas as correções, bem com ao meu Co-Tutor MSc. Venâncio Sebastião Finda, por toda atenção, dedicação, paciência e amor com que suportaram as minhas insuficiências.

Alargo os meus agradecimentos ao colectivo de professores da Secção de Ensino Matemática e não só MSc. Isaias Veloso, Lic. António Dionísio Denga Cariengue, MSc. Zeca Catuco A. Quimuanga, MSc. Cristina Morais, MSc. Penado Alberto, Prof. Drª. Lectícia Guillot, Lic. Afonso Wangila, Prof. Dr. Makengo Ndala, MSc. Pedro Ntinani, MSc. Estevão Zilungua Capela, Lic. Aquilino Tavares, Lic. Alípio Mendes pós que nada seria possível se não nos transmitissem os seus conhecimentos.

A minha gratidão é extensiva aos meus amigos Custódio Celestino, Santos Dongala André, Nsimba António, Amadeu Epalanga, Dulce Malundo, Lic. Domingos da Costa Manuel, Mavakala Pedro, Nsimba Domingos que nos momentos bons e maus da minha formação souberam me ouvir ajudaram-me a ser o que sou hoje.

E à todos que directa e indirecta contribuíram no processo da minha formação, os meus agradecimentos do fundo coração muito obrigado por tudo.

RESUMO

Este trabalho tem como objectivo elaborar um conjunto de exercícios que envolvem equações do plano e suas representações gráficas**.** Procurou responder à pergunta científica, como contribuir no desenvolvimento das habilidades dos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo na determinação de equações do plano e suas representações gráficas? Está dirigido na resolução de exercícios que envolvem equações do plano aos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo. Para o desenvolvimento deste trabalho, apoiou-se em alguns métodos de níveis teóricos, empíricos e estatístico matemático. O suporte teórico em que o trabalho se baseou foi a revisão bibliográfica feita no programa e em vários manuais de Matemática e outros. Este trabalho está estruturado em três capítulos e uma parte final que integra as conclusões, sugestões, referências bibliográficas e apêndices. Um pré-teste aplicado aos alunos demonstrou que havia insuficiências significativas na compreensão do assunto abordado. Após a aplicação do conjunto de exercícios acompanhados com o algoritmo de trabalho, foi necessário aplicar-se um pós-teste que revelou que houve melhorias significativas dos resultados obtidos em termos de compreensão do assunto abordado. Para o seguimento deste, utilizou-se a Norma APA (6ª edição) para apresentar as citações e as referências bibliográficas. Para verificar a eficácia da intervenção deste trabalho e a consequente comprovação da ideia a defender, realizou-se uma análise comparativa dos resultados obtidos nos testes aplicados, isto é, pré-teste e pós-teste onde notou-se resultados satisfatórios no pós-teste, o que permitiu aferir as conclusões da presente pesquisa.

Palavras-chave: Conjunto de exercícios. Equações do plano. Representação gráfica.

ABSTRACT

This work aims to elaborate a set of exercises that involve plane equations and their graphical representations. It tried to answer the scientific question, how to contribute to the development of the skills of students in the 11th grade of the Liceu do Sanza Pombo in the determination of plane equations and their graphical representations? It is aimed at solving exercises that involve equations of the plan for students from the 11th grade of Liceu do Sanza Pombo. For the development of this work, it was based on some methods of theoretical, empirical and mathematical statistical levels. The theoretical support on which the work was based was the bibliographic review carried out in the program and in several Mathematics manuals and others. This work is divided into three chapters and a final part that includes conclusions, suggestions, bibliographical references and appendices. A pre-test applied to the students showed that there were significant insufficiencies in understanding the subject covered. After applying the set of exercises followed up with the work algorithm, it was necessary to apply a post-test that revealed that there were significant improvements in the results obtained in terms of understanding the topic addressed. To follow up on this, the APA Standard (6th edition) was used to present the citations and bibliographic references. To verify the effectiveness of the intervention in this work and the consequent proof of the idea to be defended, a comparative analysis of the results obtained in the applied tests was carried out, that is, pre-test and post-test where satisfactory results were noted in the post-test , which allowed us to assess the conclusions of this research.

Keywords: Set of exercises. Plan equations. Graphic representation.

Sumário

INTRODUÇÃO

O homem sujeito da história, conseguiu com o seu trabalho chegar ao actual desenvolvimento tecnológico. Esse desenvolvimento fez com que o homem tomasse consciência de suas potencialidades e com sua inteligência e trabalho participa da evolução do mundo.

No decorrer do tempo o homem encontra-se com vários tipos de problemas e uma maneira de tentar solucionar seus problemas é através do conhecimento dos quais o mais importante é o conhecimento científico.

Daí a necessidade do desenvolvimento das questões relativas ao ensino das equações do plano e suas representações gráficas, permitindo uma maior aproximação entre a Matemática e a realidade, porque quando se fala da equação do plano e sua representação gráfica muitas das vezes os alunos ficam sem ideia.

1- APRESENTAÇÃO E DELIMITAÇÃO DO TEMA

O trabalho que se desenvolveu tem como tema: **“Conjuntos de exercícios envolvendo equações do plano e suas representações gráficas na 11ª Classe”** no Liceu do Município de Sanza Pombo**.**

O tema escolhido, é um assunto que gera muitas dificuldades durante as aulas para os poucos professores que o ensinam e que aparece com frequência na resolução de muitos problemas em Matemática e Geometria Descritiva (representação gráfica de plano a partir de projecções de planos) associando as expressões analítica com as representações gráficas.

O trabalho que se desenvolveu, está estruturado com uma introdução, três (3) capítulos, conclusão, sugestões, referências bibliográficas e apêndices.

No primeiro capítulo tratou-se da fundamentação teórica, onde fez-se uma abordagem teórica dos conteúdos que deram sustentabilidade da pesquisa em causa.

No segundo capítulo, apresentou-se um conjunto de exercícios envolvendo equações de plano e suas representações gráficas com os passos que ajudaram a sua resolução analítica e gráfica.

No terceiro capítulo fez-se o tratamento dos dados que foram recolhidos depois da aplicação do pré-teste (antes das aulas) e no pós-teste (depois das aulas envolvendo os critérios utilizados no segundo capítulo) que serviu para apurar a validez e a eficácia deste trabalho pesquisado.

O conteúdo que fala sobre equação do plano e sua representação gráfica é um assunto matemático que consta no programa da 11ª Classe das escolas do II Ciclo (Liceu), na opção de Ciências Físicas e Biológica na Unidade II- Produto Escalar de dois vectores no plano e no espaço. Perpendiculares de Vectores e rectas. Intersecção de planos e rectas no plano. Assim, a esta pesquisa está delimitada apenas nos os exercícios que envolvem equações do plano e sua representação gráfica aos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo.

2- PROBLEMA CIENTÍFICO

Tendo em conta a contradição que possa existir entre o estado actual e o que se desejou para a melhoria do processo de ensino e aprendizagem do assunto que se pesquisou, levantamos o seguinte problema científico:

- ✓ **Como contribuir no desenvolvimento das habilidades dos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo na determinação de equações do plano e suas representações gráficas?**

3- IDEIA A DEFENDER

O trabalho que se desenvolveu faz parte de um ramo da Matemática (Geometria Analítica) que tem-se lecionado no Ensino Médio e Superior, e que tem ajudado bastante no desenvolvimento das capacidades cognitivas dos alunos na resolução de vários problemas da vida. Mas tendo em conta as dificuldades, falta de habilidades dos alunos e falta de um tratamento metodológico no manual do aluno nesta área do saber, então, defendeu-se a seguinte ideia:

- ✓ **A elaboração de um conjunto de exercícios envolvendo as equações do plano e suas representações gráficas com passos bem detalhados que possam facilitar o processo de ensino-aprendizagem, contribui no desenvolvimento das habilidades dos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo.**

4- JUSTIFICATIVA

Um dos grandes propósitos como estudantes universitários e professor de Matemática, é fazer investigações dos problemas que afligem a mesma área do conhecimento e posteriormente trabalhar para minimizá-los de modo que se melhore o processo de ensino-aprendizagem. Claro que isso só é possível se o processo de minimização das dificuldades começar da base para o topo e as entidades superiores ouvirem dos agentes de Educação.

Tendo em conta o relatado acima sobre o estudo que se investigou, identificou-se o seguinte:

- ✓ O manual elaborado para o aluno (10ª Classe) apresenta algumas equações do plano em forma de condições, mas não apresenta procedimento para a obtenção da mesma;
- ✓ O manual da 10ª Classe apresenta representação gráfica de um plano, mas não existe os procedimentos para sua representação;
- ✓ O manual da 10ª Classe apresenta equações do plano de forma reduzida, ou seja, do tipo $x = 2, y = 2$ e $z = -1$ e uma do tipo $2x - 4y + 1 = 0$.
- ✓ O manual da 11ª Classe não apresenta conteúdo relacionado com o tema;
- ✓ Falta de um tratamento metodológico adequado da unidade em estudo no manual do aluno.

Assim, os manuais destas classes não tendo tratado deste assunto metodologicamente, trazem algumas dificuldades que possam criar desvios em termos de formação de competências dos alunos. Por isso, destacamos as seguintes insuficiências que se possa verificar no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo de ensino:

- ✓ Desconhecimento por parte dos alunos na determinação da equação do plano e sua representação gráfica.
- ✓ 36,4% alunos não conseguem identificar a equação de um plano.

Com base a estas razões relacionadas com os manuais e as dificuldades que os alunos apresentaram no processo de ensino e aprendizagem deste assunto, surgiu a necessidade de abordar este assunto em que se pensa com ele ajudar os alunos e alguns professores que trabalham com os alunos deste nível de ensino na administração do conteúdo sobre o nosso tema.

5- OBJECTIVOS

- ✓ **Objectivo Geral**

Elaborar um conjunto de exercícios que envolvem equações do plano e suas representações gráficas, para contribuir no desenvolvimento das habilidades dos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo**.**

- ✓ **Objectivos específicos**

1. Fundamentar teoricamente os elementos essenciais para o processo de ensino e aprendizagem das equações do plano e suas representações gráficas no Liceu do Sanza Pombo;
2. Diagnosticar o estado actual do processo de ensino e aprendizagem das equações do plano e suas representações gráficas no Liceu do Sanza Pombo;
3. Determinar os procedimentos para obtenção da equação do plano e sua representação gráfica no Liceu do Sanza Pombo;
4. Avaliar o impacto do conjunto de exercícios das equações do plano e suas representações gráficas no Liceu do Sanza Pombo.

6- OBJECTO DE INVESTIGAÇÃO

O trabalho teve como objecto de investigação: processo de ensino e aprendizagem da Matemática na 11ª Classe no Liceu do Sanza Pombo.

7- CAMPO DE ACÇÃO

Processo de ensino e aprendizagem das equações do plano e sua representação gráfica nos alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo.

8- TAREFAS DE INVESTIGAÇÃO

1. Fundamentos teóricos sobre os elementos essenciais para o processo de ensino e aprendizagem das equações do plano e suas representações gráficas no Liceu do Sanza Pombo;
2. Diagnóstico do estado actual do processo de ensino e aprendizagem das equações do plano e suas representações gráficas no Liceu do Sanza Pombo;
3. Determinação dos procedimentos para obtenção da equação do plano e sua representação gráfica no Liceu do Sanza Pombo;

4. Avaliação do impacto do conjunto de exercícios das equações do plano e suas representações gráficas no Liceu do Sanza Pombo.

9- METODOLOGIA

O termo metodologia significa estudo do método. Todavia, dependendo de sua utilização, a palavra metodologia tem dois significados totalmente distintos:

“Ramo da Pedagogia, cuja preocupação é o estudo dos métodos mais adequados para a transmissão do conhecimento” (ZANELLA, 2013, p. 22).

“Ramo da metodologia científica e da pesquisa, que se ocupa do estudo analítico e crítico dos métodos de investigação” (ZANELLA, 2013, p. 22).

Metodologia: Estuda, descreve os métodos, explica, interpreta, compreende e avalia.

“Método: Forma ordenada de procede r ao longo de um caminho. Conjunto de processos ou fases empregadas na investigação, na busca do conhecimento” (ZANELLA, 2013, p. 26)

Para a realização desta pesquisa e para concretização dos objectivos, trabalhamos com os seguintes métodos:

- ✓ **MÉTODOS DE NÍVEL TEÓRICO**

Entre os métodos de nível teórico a nossa pesquisa guiou-se pelos seguintes métodos:

Consulta Bibliográfica: Este método permitiu fazer um estudo profundo das referências bibliográficas que sustentaram o conjunto de exercícios que envolvem equações do plano e sua representação gráfica.

Histórico-Lógico: Este método utilizou-se para analisar a evolução histórica sobre o plano e sua representação gráfica.

Análise e síntese: Permitiu o estudo de Bibliografias e a extracção de ideias principais que serviram de apoio para este trabalho de investigação.

- ✓ **MÉTODOS DE NÍVEL EMPÍRICO**

Entre os métodos de nível empírico, nos apropriamos dos seguintes:

Observação: Este método estava presente em todo o processo de pesquisa e com mais ênfase na sala de aula, possibilitou constatar na prática a aprendizagem dos alunos, e o estado actual dos conhecimentos e habilidades que possuem quanto a temática em abordagem.

Inquérito: Consistiu na aplicação de um questionário que nos permitiu encontrar as principais dificuldades que os alunos da 11ª Classe do Liceu do Sanza Pombo apresentam no estudo da equação do plano e suas representações gráficas

- ✓ **Método Estatístico Matemático**

Permitiu analisar as informações colhidas podendo para o efeito, agrupar, organizar, sintetizar os dados em diferentes quadros bem como a sua representação gráfica. Para tal, usou-se:

Análise percentual: Se utilizou na quantificação e no processamento dos dados obtidos, o que possibilitou fazermos a interpretação após a aplicação do pré-teste e o pós-teste em quadros e gráficos.

- ✓ **POPULAÇÃO E AMOSTRA**

O trabalho foi desenvolvido com uma população igual a amostra de 22 alunos da 11ª Classe da Especialidade de Ciências Físicas e Biológicas do Liceu do Município do Sanza Pombo.

- ✓ **TIPO DE AMOSTRAGEM**

Amostragem é a técnica utilizada para se obter uma amostra. No nosso trabalho utilizaou-se a amostragem não probalística, isto é, por tipicidade ou intencional.

Amostragem não probabilística: “A seleção da amostra depende do julgamento do pesquisador. Há uma escolha deliberada dos elementos para compor a amostra” (MAYER, n.d., p. 26).

CAPITULO I- FUNDAMENTAÇÃO TEORICA SOBRE EQUAÇÃO DO PLANO E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Neste capítulo se introduz as noções sobre pontos e vectores no espaço tridimensional. Em primeiro lugar, se aborda como determinar um ponto no espaço, tipos de pontos, definição de vectores, tipos de vectores, produto escalar, produto vectorial e produto misto, pois sem esses elementos não é possível falar do assunto com muita segurança. Em seguida, vê-se como determinar a equação de um plano e representar graficamente, que é o foco desta pesquisa.

1.0- Abordagem histórica

A mais conspícua obra de Euclides (c. 325 - c. 265 a.C.), Os Elementos (c. 300 a.C.) constitui o mais notável compêndio de matemática de todos os tempos, com mais de mil edições desde o advento da imprensa (a primeira versão impressa de apareceu em Veneza em 1482). (VENTURA, 2015, pp. 13-14)

Pouco se sabe sobre a vida de Euclides. Ele foi professor do Museu em Alexandria, e provavelmente sua formação matemática tenha se dado na escola platônica de Atenas.

Na geometria Euclidiana os conceitos primitivos são os conceitos de ponto, recta, plano e espaço.

Para RABELLO (2005, p. 5), “um conceito primitivo exprime a noção sobre algo que dispensa definição sob o ponto de vista geométrico”.

Explicar cada um destes conceitos não é tarefa fácil, pois temos apenas noções primitivas sobre esses elementos, ou seja, não existe uma definição precisa para eles.

O ponto é a base da geometria, uma vez que, a partir de conjuntos de pontos, quaisquer figuras podem ser formadas.

Para GOMES (2008, p. 3):

Um ponto não tem dimensão e é representado por uma letra maiúscula (A, B, C, ...). Uma recta tem uma dimensão e é representada por uma letra minúscula (r,s,t, ...).

Um plano tem duas dimensões e é representado por uma letra grega maiúscula ($\alpha, \beta, \theta, \ldots$)

Formalmente, representamos pontos por um pingo (como o da letra i).

Podemos notar que, por mais que possa ser caracterizada, uma recta não pode ser definida, pois os pontos que a configuram também não podem.

Também não há definição para plano. Entretanto, podemos estudar sua formação e algumas das suas características.

Podemos entender o plano pelo enfileiramento de infinitas rectas, ou seja, o plano é o conjunto infinito e ilimitado de rectas.

Sobre os planos é possível desenhar figuras que possuem comprimento e largura, por isso, ele é bidimensional. É dentro dos planos que se constituem os polígonos (figuras geométricas de três ou mais lados), como triângulos, quadrados, e etc.

É impossível desenhar qualquer objecto que possua profundidade, a não ser em perspectiva, sobre um plano.

O plano é um conceito que se estuda na Geometria e para desenvolvermos está disciplina necessitamos não só dos conceitos primitivos como também de postulados ou axiomas e teoremas.

Segundo SCHOR e TIZZIOTTI (1975, p. 167), Postulados: são proposições que não se demostram e que se servem de base para o desenvolvimento de uma teoria.

Para SCHOR e TIZZIOTTI (1975, p. 167), Teorema: são proposições demonstraveis que complementam o desenvolvimento da teoria.

O espaço é o lugar onde é possível medir comprimento, largura e profundidade. Sendo assim, o espaço permite a criação de objectos tridimensionais. Ele é infinito e ilimitado para todas as direcções.

A Geometria Analítica foi desenvolvida durante o século XVII por René Descartes (1596-1650), filósofo, físico, advogado e matemático francês, autor da máxima “Penso, logo existo”. Sua obra foi exposta em seu livro La Géometrie, que introduziu a álgebra no estudo da geometria e vice-versa, criando a geometria com coordenadas. Seus estudos foram tão significativos que a palavra cartesiano é uma homenagem ao seu nome, pois Descartes, em latim, é Cartesius.

"Um dos objetivos da Geometria Analítica é determinar a reta que representa uma certa equação ou obter a equação de uma reta dada, estabelecendo uma relação entre a geometria e a álgebra" (BOSQUILHA, CORRÊA, & VIVEIRO, 2003, p. 306).

> A Geometria Analítica introduzida por Pierre de Fermat e René Descartes, por volta de 1636, foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática. Através da representação de pontos da recta por números reais, pontos do plano por pares ordenados de números reais e pontos do espaço por ternos ordenados de números reais, curvas no plano e superfícies no espaço podem ser descritas por meio de equações, tornando possível tratar algebricamente muitos problemas geométricos e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica diversas questões algébricas (FRENSEL & DELGADO, 2011, p. 1).

"A Geometria Analítica é um ramo da Matemática que estuda o lugar geométrico dos pontos do plano ou do espaço utilizando os princípios da Álgebra" (FREITAS & NASCIMENTO, n.d., p. 7).

Os sistemas de coordenadas se constituem no princípio fundamental para o tratamento das equações que descrevem lugares geométricos. Comumente, o de coordenadas cartesianas é utilizado para estabelecer a relação entre as equações e os gráficos de uma reta, de um plano, ou de lugares geométricos notáveis.

A relação equação algébrica versus representação gráfica se constitui em um dos principais fatores estudados em Geometria Analítica e especialmente no nosso trabalho.

1.1- Sistema de coordenadas no espaço tridimensional

Em Geometria Analítica plana as equações contêm duas variáveis. Na espacial, três variáveis. Nesta se exige maior esforço de visualização das figuras.

O Conjunto de pontos do espaço tridimensional será indicado por E^3. (VENTURA, 2015, p. 51).

Sejam x, y e z três rectas orientadas mutuamente perpendiculares entre si e concorrentes no ponto O.

Principais elementos, segundo VENTURA (2015, p. 51)

- Ponto O: é a origem do sistema cartesiano
- Rectas orientadas: Eixos cartesianos
- Planos xy, xz, yz: Planos cartesianos

Serão considerados, eixo das abcissas (eixo dos xx). Eixo das ordenadas (eixo dos yy) e o eixo das cotas (eixo dos zz).

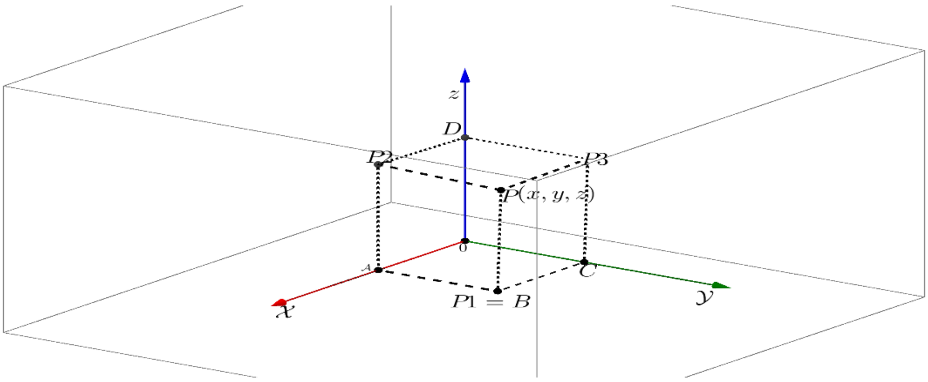
A cada ponto P no espaço associamos um terno de números reais (x, y, z), chamado de coordenadas do ponto P como segue SANTOS (2012, p. 145).

• Trace uma reta paralela ao eixo z, passando por P;

A intersecção da reta paralela ao eixo z, passando por P, com o plano xy é o ponto B. As coordenadas de B, (x, y) no sistema de coordenadas xy são as duas primeiras coordenadas de P.

• A terceira coordenada é igual ao comprimento do segmento PB, se P estiver acima do plano xy e ao comprimento do segmento PB, com o sinal negativo, se P estiver abaixo do plano xy.

Figura 1 Localização de um ponto no espaço



Fonte: Próprio autor

Na figura acima podemos notar que:

$\overline{0A} = x$ É a abcissa do ponto P

$\overline{0C} = y$ É a ordenada do ponto P

$\overline{BP} = z$ É a cota do ponto P

Pelo que x, y, z são as coordenadas do ponto P, escrevendo-se por P(x, y, z)

Particularidades segundo VENTURA (2015, p. 52):

a) O=(0,0,0): Origem do sistema cartesiano
b) P_1=B= $(x, y, 0)$, $P_{2=}(x, 0, z)$, P_3= $(0, y, z)$ representam as projecções ortogonais do ponto P sobre os planos coordenados xy, xz, yz.
c) $A = (x, 0,0), C = (0, y, 0), D = (0,0, z)$ Representam as projecções ortogonais do ponto P sobre os eixos coordenados x, y e z.
d) Não sendo os eixos mutuamente perpendiculares temos um sistema de coordenadas oblíquas.

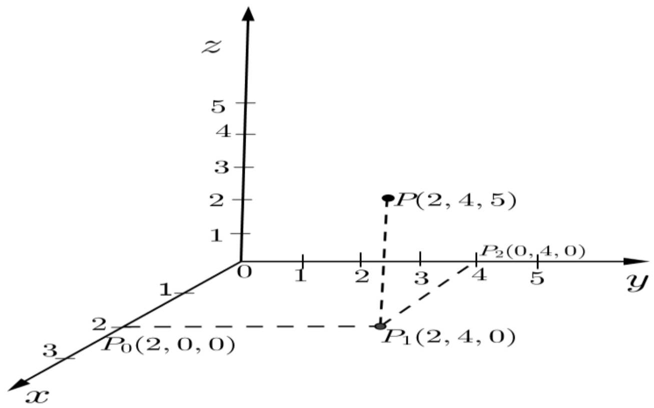
Exemplo: Representar no sistema de coordenadas tridimensional o Ponto $P\ (2, 4, 5)$.

Resolução

Temos o ponto P(2,4,5)

Tracemos o sistema cartesiano tridimensional e nele teremos o ponto P, temos:

Figura 2 Localização do ponto P(2,4,5)



Fonte: Próprio autor

Para SANTOS (2012, p. 147), as coordenadas de um ponto P são determinadas também da maneira dada a seguir:

1. Passe três planos por P paralelos aos planos coordenados.
2. A intersecção do plano paralelo ao plano xy passando por P, com o eixo z determina a coordenada z.

3. A intersecção do plano paralelo ao plano xz, passando por P, com o eixo y determina a coordenada y
4. A intersecção do plano paralelo ao plano yz, passando por P, com o eixo x determina a coordenada x.

1.2- Pontos Colineares

"Dois ou mais pontos são colineares se pertencem a uma mesma recta" (FREITAS & NASCIMENTO, n.d., p. 72).

Por analogia de vectores paralelos, dados pontos A, B e C, dizemos que os pontos são colineares se e somente se $\overline{AB} = k\overline{AC}$ onde k Є ℝ.

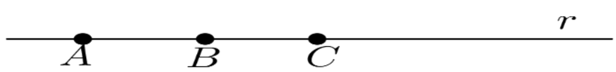
Exemplo: Dados os pontos A(3,1,5), B(2,0,1) e C(4,2,9), provar que A, B e C são colineares;

Resolução

A(3,1,5), B(2,0,1) e C (4,2,9

Dada a recta abaixo

Figura 3 Pontos colineares



Fonte: Próprio autor

Notemos que os segmentos $\overline{AB} \parallel \overline{AC}$ e $\overline{AB} = k\overline{AC}$

$\overline{AB} = B - A = (-1,-1,-4)$

$\overline{AC} = C - A = (1,1,4)$

$\frac{-1}{1} = \frac{-1}{1} = \frac{-4}{4} = -1 = K$, logo podemos escrever

$\overline{AB} = -1(\overline{AC})$: Concluímos que A, B e C são colineares.

Assim, estamos prontos para utilizarmos um sistema de coordenadas cartesianas também nas operações de vetores no espaço.

1.3- Vectores no Espaço

O conceito de vector surgiu na Mecânica com o engenheiro flamengo Simon Stevin o Arquimedes holandês. Em 1586 apresentou, em sua Estática e Hidrostática, o problema de

> composição de forças e enunciou uma regra empírica para se achar a soma de duas forças aplicadas num mesmo ponto. Tal regra, que é conhecida como a regra do paralelogramo. Os vectores aparecem considerados como linhas dirigidas na obra Ensaio sobre a Representação da Direcção, publicada em 1797 por Gaspar Wessel, matemático dinamarquês. A sistematização da teoria vectorial ocorreu no século XIX com os trabalhos do irlandês Willam Hamilton (notavelmente precoce: aos 5 anos Lia grego latim hebraico), do alemão Herman Grassimann e do físico norte americano Josiah Gibbs (VENTURA, 2015, p. 64).

Certas grandezas físicas ficam determinadas apenas por um número real, acompanhado pela unidade correspondente. Outras grandezas necessitam além do número real, também de uma direção e de um sentido.

1.3.1. Definições, etimologia e notações

Definição: Segundo SANTOS (n.d., p. 8) "A um segmento orientado $\overline{AB}$ de origem em A, extremidade B, que se conhece a direção, o sentido e o comprimento (modulo ou norma) dá-se o nome de vector".

1.3.1.1- Etimologia da palavra vector

Segundo VENTURA (2015, p. 65) "a palavra vector provém do verbo latino vehere: transportar, levar, Vector é o particípio passado de vehere, significando transportado, levado. Apesar de primitiva e até bizarra, a palavra vector é pertinente: O ponto O é transportado até P".

1.3.1.2- Notações de vector

A notação de vectores nesta pesquisa, ilustra-se de três maneiras, como (VENTURA, 2015, pp. 65-66) representa:

I. Uma letra latina minúscula acima por uma seta.

$\vec{a}, \vec{b},...,\vec{t},\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w},...$

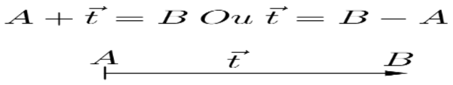
II. Uma letra latina minúscula sobre linhada;

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c},..., \bar{u}, \bar{v},...$

III. Dois pontos que são a origem e a extremidade de um vector.

Exemplos: A soma do ponto A com o vector $\vec{t}$ é o ponto B.

Figura 4 Vector



Fonte: Próprio autor

Onde A é a origem e B é a extremidade do vector.

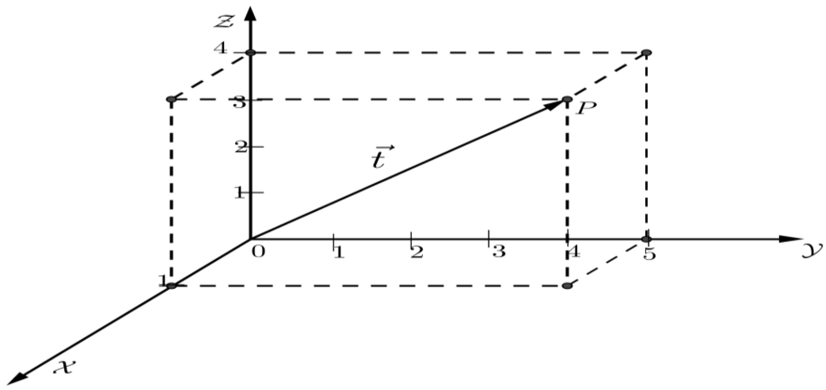
Esta notação é assaz vantajosa pelas aplicações das operações algébricas e é devido ao matemático alemão H. Gassmann (1809-1877). Também bastante usual a notação $\vec{t} = \overline{AB}$,

IV. Uma terna ordenada de números reais $\vec{t} = (x, y, z)$;

Onde x, y e z são componentes do vector $\vec{t}$.

Exemplo: $\vec{t} = (1,5,4)$

Figura 5 Representação do vector no espaço



Fonte 1: Próprio autor

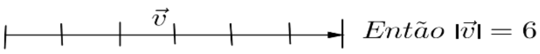
Nota: Usualmente, quando já estiver no sistema de coordenadas, o representante do vector é aquele cuja origem coincida com a origem do sistema.

1.3.2- Tipos de Vectores

Modulo de um Vector: "É o número não negativo que indica o comprimento do vector". (VENTURA, 2015, p. 66).

Exemplo:

Figura 6 Modulo de um vector



Fonte: Próprio autor, 2021.

Vector Nulo: É o vector de direção e sentido arbitrários, e modulo igual a zero. O vector nulo tem coordenadas (0,0,0) e sua representação gráfica é a origem do sistema de coordenadas (VENTURA, 2015, p. 66)

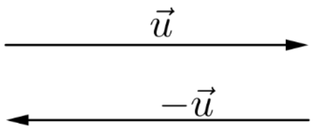
Vector Unitário: É o vector de modulo igual a 1 (VENTURA, 2015, p. 67); $|\vec{v}| = 1$

Versor

O versor de um vector $\vec{v}$ não nulo, é o vector unitário que tem a mesma direção e o mesmo sentido de $\vec{v}$.

Vector Oposto: "Dado um vector $\overrightarrow{AB}$ o seu oposto é o vector $\overrightarrow{BA}$ e se representa por $-\overrightarrow{BA}$. O vector oposto de um vector $\vec{v}$ é representado por $-\vec{v}$" (VENTURA, 2015, p. 67).

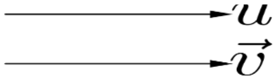
Figura 7 Vectores Opostos



Fonte: Próprio autor

Vectores equipolentes: Para SANTOS (n.d., p. 8) "Ao conjunto de vectores com a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo modulo, dá-se o nome de vector equipolente"

Figura 8 Vectores equipolentes



Fonte: Próprio autor

Vector livre

Para SANTOS (n.d., p. 8) “A um vector elemento do conjunto de vectores equipolentes dá-se o nome de vector livre”.

Base Ortonormada

Ilustraremos as bases ortonormadas, como SANTOS (n.d., pp. 28-29) explica:

Consideremos sobre os eixos coordenados, no sentido positivo dos seus eixos os vecotores $\vec{e}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ (vectores unitários).

$\vec{e}$ é o vector de componentes (1,0,0)

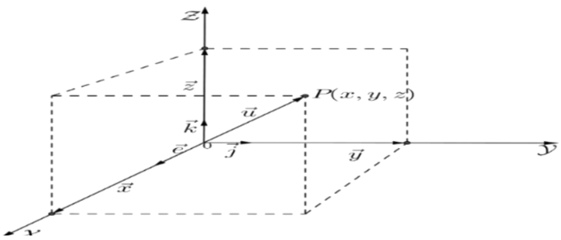
$\vec{j}$ é o vector de componentes (0,1,0)

$\vec{k}$ é o vector de componentes (0,0,1)

Os vectores $\vec{e}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ são perpendiculares entre si e são unitários.

Os três vectores constituem uma base ortonormada

Figura 9 Base ortonormada



Fonte: Próprio autor

Notemos que $\vec{u} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$

Os vectores $\vec{x}\ e\ \vec{e}$ são colineares;

Os vectores $\vec{y}\ e\ \vec{j}$ são colineares;

Os vectores $\vec{z}\ e\ \vec{k}$ são colineares;

$\overrightarrow{OA} = A - O = \vec{x} = x\vec{e}$ com $x = |\vec{x}|$

$\overrightarrow{OB} = B - O = \vec{y} = y\vec{j}$ com $y = |\vec{y}|$

$\overrightarrow{OC} = C - O = \vec{z} = z\vec{k}$ com $z = |\vec{u}|$

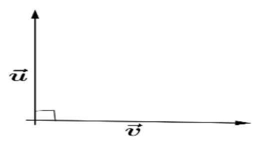
Logo o vector $\vec{u}$ algebricamente sera:

$\vec{u} = x\vec{e} + y\vec{j} + z\vec{k}$ onde $|\vec{e}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$

Segundo MIRANDA, GRISI e LUDOVICI (2015, p. 5):

> Dois vectores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ditos ortogonais, se um dos vectores for um vector nulo, ou se ao escolhermos dois representantes para esses vectores que iniciam no mesmo ponto $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ esses segmentos forem ortogonais, ou seja, se o ângulo determinada por esses segmentos for um ângulo recto.

Figura 10 Vectores Ortogonais



Fonte: Próprio autor

Note que, segundo a nossa definição, o vector nulo $\vec{0}$ é o único vector paralelo e ortogonal a qualquer outro vecto, e coplanar a qualquer parade vectores.

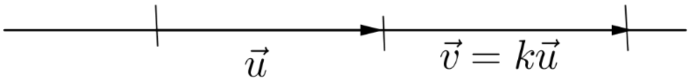
Vectores Paralelos

"Pelo teorema de paralelismo de vector obtemos $\vec{u}$ é paralelo a $\vec{v}$ se, e somentese, existir um número real k talque $\boldsymbol{\vec{v} = k\vec{u}}$" (VENTURA, 2015, p. 80)

Consideremos $\vec{u} = (x, y, z)$, $\vec{v} = (a, b, c)$, ou seja: $(a, b, c) = k(x, y, z)$ explicitando obtem-se a condição de paralelismo dos vectores.

$$\boldsymbol{\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k}$$

Figura 11 Vectores paralelos



Fonte: Próprio autor

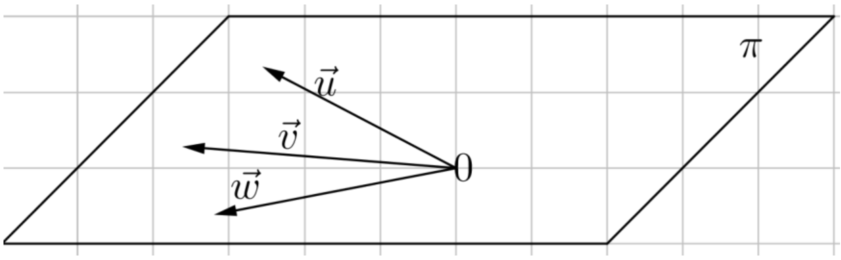
Por convenção: A nulidade de um dos denominadores implica na nulidade do correspondente numerador.

Vectores Coplanares:

Teorema: Para VENTURA (2015, p. 84): "O vector $\vec{v}$ é coplanar aos vectores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ (não nulos e não paralelos entre si) se, e somente se: $\vec{v} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2$, sendo k_1 e k_2 escalares"

Três vectores sãos coplanares se um deles for combinação linear dos outros dois vectores, isto é, pertencendo (os três vectores) a um mesmo plano π e o seu determinante é nulo.

Figura 12 Vectores coplanares



Fonte: Próprio autor

Exemplo: Dados os vectores $\vec{u} = (1,3,0)$, $\vec{v} = (2,1,4)$ e $\vec{w} = (3,4,4)$ provar se são coplanares os três vectores.

Resolução

$\vec{u} = (1,3,0)$, $\vec{v} = (2,1,4)$, $\vec{w} = (3,4,4)$

Para calcularmos o determinante vamos recorrer ao teorema de Pierre Simon Marquis de Laplace.

Teorema: "O determinante de qualquer matriz quadrada M de ordem n é igual à soma dos produtos dos elementos de uma fila pelos respectivos cofatores" (SCHOR & TIZZIOTTI, 1975, p. 130).

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 1(4-16) - 3(8-12) + 0(8-3) = 0 \Leftrightarrow -12 + 12 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Logo os vectores $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares

Igualdade entre Dois Vetores

Para, FREITAS e NASCIMENTO (n.d., p. 55) “Dois vetores são iguais se, e somente se, suas coordenadas o são, ou seja, $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow (u_1, u_2, u_3) = (v_1, v_2, v_3) \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2\ e\ u_3 = v_3$”.

1.3.3- Operações com Vectores

Adição entre vectores

“Dados dois vetores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ definimos a adição da seguinte forma: $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$" (FREITAS & NASCIMENTO, n.d., p. 55).

Subtração de vectores

Definição

“Dados vectores u e v, definimos a diferença de $\vec{u} - \vec{v}$ por $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$” (VENTURA, 2015, p. 72)

Exemplo: Dado os vectores $\vec{u} = (2,3,-1)$ e $\vec{v} = (1,-1,1)$, determinar:

a) $\vec{u} + \vec{v}$;
b) $\vec{u} - \vec{v}$;
c) Representar geometricamente a soma e a diferença acima.

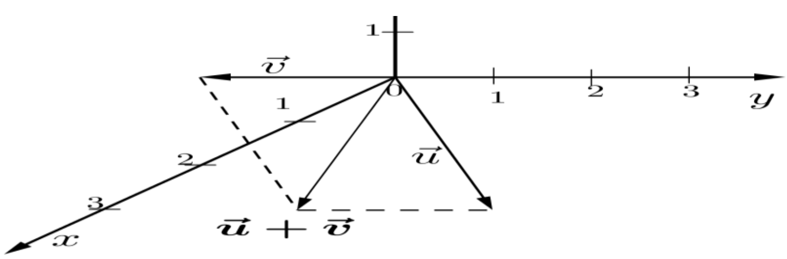
Resolução:

$\vec{u} = (2,3,-1), \vec{v} = (1,-1,1)$

a) $\vec{u} + \vec{v} = (2,3,-1) + (1,-,1,1) \Leftrightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3,2,0)$
b) $\vec{u} - \vec{v} = (2,3,-1) - (1,-1,1) \Leftrightarrow \vec{u} - \vec{v} = (1,4,-2)$

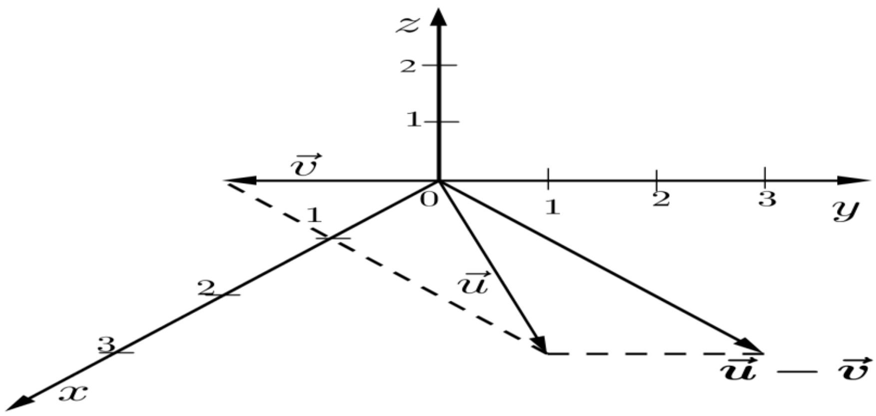
c) Interpretação geométrica

Figura 13 Adição de dois vectores



Fonte: Próprio autor

Figura 14 Subtração de dois vectores



Fonte: Próprio autor

WINTERLE (2007, p. 8) explica a propriedade da adição de vectores da seguinte forma:

Propriedade comutativa

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Associatividade

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}\,) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

Existência do vector nulo

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{O} + \vec{u} = \vec{u}$

Existência do Vector Oposto

$\vec{u} + (-\vec{u}\,) = \vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

1.3.3.1- Produto Escalar

Definição Algébrica

Segundo WINTERLE (2007, p. 49) “chama-se produto escalar de dois vectores $\vec{u} = x_1\vec{e} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{e} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ e se representa por $\vec{u}.\vec{v}$ ao número real $\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$”

Exemplos: Dados os vectores $\vec{u} = 3\vec{e} - 5\vec{j} + 8\vec{k}$ e $\vec{v} = 4\vec{e} - 2\vec{j} - \vec{k}$ tem-se:

Resolução:

$\vec{u} = (3, -5, 8)\ e\ \vec{v} = (4, -2, -1)$

$\vec{u}.\vec{v} = (3, -5, 8).(4, -2, -1)$

$\vec{u}.\vec{v} = 3(4) - 5(-2) + 8(-1)$

$\vec{u}.\vec{v} = 12 + 10 - 8$

$\vec{u}.\vec{v} = 14$ É o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$.

Propriedade do produto escalar segundo WINTERLE (2007, p. 50).

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$k(\vec{u}) = k\vec{u}\ , k \in IR$

$k(\vec{u}.\vec{v}) = k(\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.k(\vec{v})$

$\vec{u}.\vec{u} > 0\ \ se\ \vec{u} \neq \vec{0}\ e\ \vec{u}.\vec{u} = 0, se\ \vec{u} = \vec{0} = (0,0,0)$

1.3.3.2- Produto Vectorial

Segundo RUSCHEINSKY (2008, p. 48)

> "O produto vetorial ou externo de dois vetores $\vec{u}\ e\ \vec{v}$ não paralelos entre si, no espaço R^3, é um terceiro vector que se representa na forma $\vec{u} \times \vec{v}$. Por isso, ele dá a seguinte definição: Se $\vec{u} = (a, b, c)$ e $\vec{v} = (x, y, z)$, então o produto vetorial de $\vec{u} \times \vec{v} = (bz - yc, xc - az, ay - yb)$".

1.3.3.3- Produto Misto

Como o próprio nome diz, o produto misto é a união do produto escalar com o produto vetorial. Assim o produto misto também está definido somente em R^3 e para ter o produto misto necessitamos de três vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$.

Definição: "o produto misto dos vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ nessa ordem, é o número real $(\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$ indicado por $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$: Logo $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}).\vec{w}$". (RUSCHEINSKY, 2008, p. 51)

Dados os vetores então $\vec{u} = (a, a, c), \vec{v} = (l, m, n) e\ \vec{w} = (x, y, z)$, o produto misto é o determinante da matriz gerada pelos três vetores, ou seja.

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ l & m & n \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Se $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$, os três vectores são coplanares.

1.4- Equação geral do plano

Segundo SILVA e COSTA (2014, p. 15) "Equação é toda sentença matemática aberta que exprime uma relação de igualdade. A palavra equação tem prefixo «equa», que em latim quer dizer igual".

Estamos diante de equações do plano quando nos referimos as igualdades com variáveis no espaço tridimensional.

1.4.1- Equação do plano que passa por um ponto e ortogonal a um vetor

Seja A(x_0,y_0,z_0) um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vector normal ao plano.

"Como $\vec{n} \perp \pi, \vec{n}$ é ortogonal a todo vector representado em π. Então, um ponto P(x, y, z) pertence a π se e somente se, o vector $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$" (WINTERLE, 2007, p. 125).

Isto é: $\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\,.(P - A) = 0$

$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0)=0$

$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(\,y - y_0) + c(\,z - z_0) = 0}$ (1) Equação dos planos que passam por um ponto

$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$

Fazendo: $-ax_0 - by_0 - cz_0 = d \quad (\mathbf{1'})$

$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0} \qquad (\mathbf{2})$ Está é a equação geral de um plano.

Exemplo:

a) $3x + 2y - 4z + 8 = 0$ Equação completa de um plano
b) $2y + 3z - 6 = 0$
c) $z = 3$
d) $x = 0$

As alíneas $b, c\ e\ d$ representam equações do plano na forma incompleta.

Nota:

a) Assim como $\vec{n}$ é normal a π, qualquer vector $k\vec{n},\ k \neq 0$ é também vector normal ao plano.
b) É importante notar que os três coeficientes $a, b\ e\ c$ da equação acima, representam as componentes de um vector normal ao plano.

Por exemplo: Se um plano π é dado por:

$\pi: 3x + 2y - z + 1 = 0$ Um de seus vectores normais é $\vec{n} = (3,2,-1)$.

$c)$ Para obter pontos de um plano dado por uma equação geral, basta atribuir valores arbitrários a duas variáveis e calcular o valor da outra equação na equação dada.

Assim, por exemplo, se na equação anterior fizermos $x = 4, y = -2$, teremos:

$3(4) + 2(-2) - z + 1 = 0 \Leftrightarrow 14 - 4 - z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = 9$

Teremos, portanto, o ponto A$(4, -2,9)$ que pertence a este plano.

1.4.2- Equação do plano determinada por um ponto e por dois vectores

"O plano π contém o ponto P_0 e é paralelo aos vectores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ ($\vec{v}_1$ não paralelo a $\vec{v}_2$). O ponto P(x, y, z) pertence ao plano π, se e somente se, os vectores $P - P_0$, $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ forem coplanares" (VENTURA, 2015, p. 157).

Sendo: $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P(x, y, z), \vec{v}_1 = (a, b, c)$, e $\vec{v}_2 = (l, m, n)$

$P - P_0 = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ temos:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x-x_0} & \boldsymbol{y-y_0} & \boldsymbol{z-z_0} \\ a & b & c \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \ (3)$$

Para determinarmos a equação usando cálculo de determinante, podemos recorrer a regra de Laplace para o cálculo de determinante.

Equação Vectorial

Para Santos (s.d, p. 113) "a equação vectorial do plano π determinada por um ponto e dois vectores é dada na forma: $\boldsymbol{P - P_0 = k\vec{u} + l\vec{v}}$ **(4)**; Onde $k\ e\ l$ Є ℝ são parâmetros".

1.4.3- Equação geral dos planos que passam por dois pontos

Segundo SANTOS (n.d., pp. 126-127), pretende-se determinar os planos que além de passar P_0, se também passam por $P_1(x_1, y_1, z_1)$.

Desta forma substituímos na equação $\mathbf{1}, x, y\ e\ z$ por x_1, y_1, z_1 temos:

$\boldsymbol{a(x - x_0) + b(\ y - y_0) + c(\ z - z_0) = 0(1)}$

$\boldsymbol{a(x_1 - x_0) + b(\ y_1 - y_0) + c(\ z_1 - z_0) = 0\ (5)}$

Se isolarmos a na primeira equação e substituirmos na 5 teremos uma família de planos**.**

1.4.4- Equação do plano determinada por três pontos não colineares

"O plano π é determinado pelos pontos P_1, P_2 e P_3. Um ponto genérico $P(x, y, z)$ pertence ao plano π se e somente se, os vectores $(P - P_2)$, $(P_2 - P_1)$, e $(P_3 - P_2)$ forem coplanares". (VENTURA, 2015, pp. 158-159)

Dados os pontos:

$P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$ e $P_3(x_3, y_3, z_3)$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \ (6)$$

Equação Vectorial

A equação vectorial do plano determinada por três pontos não colineares é dada na forma:

$\boldsymbol{P - P_1 = k(P_2 - P_1) + l(P_3 - P_1)}$ **(7)**

1.4.4.1- Equação do plano determinada por dois pontos e por um vector

“O plano π é passante por P_1 e P_2 e é paralelo ao vector $\overrightarrow{v}$. Um ponto genérico $P(x, y, z)$ pertence ao plano π se, e somente se, os vectores $(P - P_1), (P_2 - P_1)$ e $\overrightarrow{v}$ forem coplanares” (VENTURA, 2015, p. 158).

Dados os pontos

$P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$ e o vector $\vec{v} = l\vec{e} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0 \ (8)$$

A resolução de cada determinante representado por (3), (4) e (6) conduz a uma equação linear a três variáveis que denominamos equação cartesiana do plano:

$$\boxed{\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}} \quad (2)$$

Equação Vectorial

A equação vectorial do plano π determinada por dois pontos e um vector será dada na forma:

$$\mathbf{P\text{-}P_1} = \boldsymbol{k\vec{u} + l(P_2 - P_1)} \ (\mathbf{9})$$

1.4.4.2- Equação paramétrica determinada por dois pontos e um vector

Da equação vectorial podemos determinar a equação paramétrica e a equação cartesiana se for o caso.

Sendo, $P(x, y, z)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P(x_2, y_2, z_2)$ e o vector $\vec{v} = l\vec{e} + m\vec{j} + n\vec{k}$

$\mathbf{P\text{-}P_1} = \boldsymbol{k\vec{u} + l(P_2 - P_1)}$

$(x - x_1)\vec{e} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k} = k\left(l\vec{e} + m\vec{j} + n\vec{k}\right) + p[(x_2 - x_1)\vec{e} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}]$

Comparando membro a membro, teremos:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - x_1 = kl + p(x_2 - x_1)} \\ \boldsymbol{y - y_1 = km + p(y_2 - y_1)} \\ \boldsymbol{z - z_1 = kn + p(z_2 - z_1)} \end{cases} \ (10)$$

Da mesma forma que obtemos a equação paramétrica acima, podemos obter as equações paramétricas a partir das equações vectoriais (4) e (7) respectivamente.

1.4.4.2.1- Pertinência de ponto ao plano

Figura 15 Pertinência de um ponto no plano

Fonte: Próprio autor

Dado um plano π de equação $ax + by + cz + d = 0$ e um ponto P (x_0, y_0, z_0), a condição para P pertencer ao plano é:

$$\boldsymbol{a(x_0)+b(y_0)+c(z_0)+d = 0} \qquad \textbf{(11)}$$

Ou seja, a tripla (x_0, y_0, z_0) deve satisfazer à equação de π.

Exemplo: Provar se o ponto $P_0(3,1,2)$ pertence ao plano $2x + y - 3z - 1 = 0$.

Resolução

$P_0(3,1,2)$

$2(3) + 1 - 3(2) - 1 = 0 \Leftrightarrow 6 + 1 - 6 - 1 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

Logo o ponto $P_0(3,1,2)$ pertence ao plano $2x + y - 3z - 1 = 0$ pois verifica a equação.

1.4.4.2.1.1- Interseção de um plano com os eixos coordenados

Seja $\pi: ax + by + cz + d = 0$

1. ***Interseção como eixo x***

O plano intercepta o eixo das abscissas no ponto $A(x, 0,0)$. Para se determinar o ponto A basta fazer $y = z = 0$ na equação do plano.

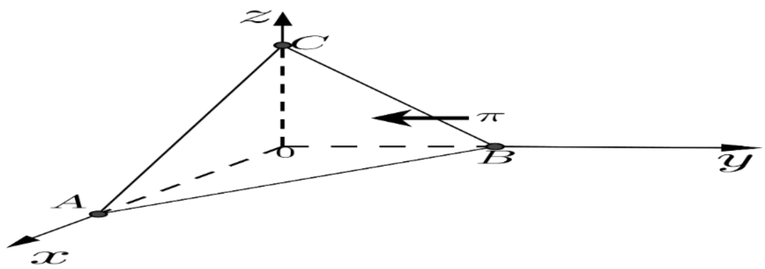
2. ***Interseção com o eixo y***

O plano intercepta o eixo das ordenadas no ponto $B(0, y, 0)$.Na equação do plano fazemos $x = z = 0$.

3. ***Interseção com o eixo z***

O plano intercepta o eixo das cotas no ponto $C(0,0, z)$; para obtermos suas coordenadas basta fazermos $x = y = 0$ na equação do plano.

Figura 16 Interseção de um plano com os eixos coordenados



Fonte: Próprio autor

1.4.5- Equação segmentária do plano

O plano π: $ax + by + cz + d = 0$ com $a, b, c, d \neq 0$ corta os eixos cartesianos em três pontos distintos $P(p, 0,0), Q(0, q, 0)$ $R(0,0, r)$ que determinamos os três segmentos $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$ e $\overline{OR}$.

Indicaremos por p, q e r respectivamente, as medidas desses segmentos.

Para obtermos a equação segmentaria do plano:

Seja a equação:

$ax + by + cz + d = 0$

$ax + by + cz = -d/(-d)$

$$\frac{ax}{-d} + \frac{by}{-d} + \frac{cz}{-d} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{-d}{a}} + \frac{y}{\frac{-d}{b}} + \frac{z}{\frac{-d}{c}} = 1 \quad (0)$$

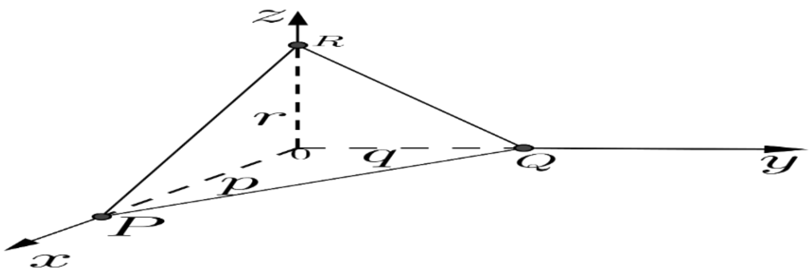
$$Fazendo: \frac{-d}{a} = p, \frac{-d}{b} = q, \frac{-d}{c} = r, e\ vamos\ substituir\ em\ (0)$$

$$\boldsymbol{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1} \qquad (12)é\ a\ equação\ segmentaria$$

"É denominada equação segmentária do plano, por interceptar o eixo x, y e z em segmentos p, q e r" (VENTURA, 2015, p. 162).

Temos a ilustração geométrica

Figura 17 Ilustração geométrica da equação segmentária do plano



Fonte: Próprio autor

Exemplo: Obter a equação segmentária do plano $4x - 3y + 2z - 12 = 0$

Resolução:

a) O plano dado é:

$4x - 3y + 2z = 12\ /(12)$

$$\frac{4x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{2z}{12} = \frac{12}{12}$$

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{6} = 1 \text{ É } a\ equação\ segmentária\ do\ plano\ 4x - 3y + 2z - 12 = 0$$

1.4.6- CASOS PARTICULARES DA EQUAÇÃO GERAL DO PLANO

A nulidade de um ou mais coeficientes na equação geral do plano, fará com que este ocupe um posicionamento particular em relação aos eixos coordenados.

Na equação $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ se:

1.º Caso

$\boldsymbol{d = 0 \Rightarrow ax + by + cz = 0}$, **Com** $(\boldsymbol{a, b, c \neq 0})$

O plano contém a origem

Justificativa:

O ponto $O(0{,}0{,}0)$ verifica a equação $ax + by + cz = 0$.

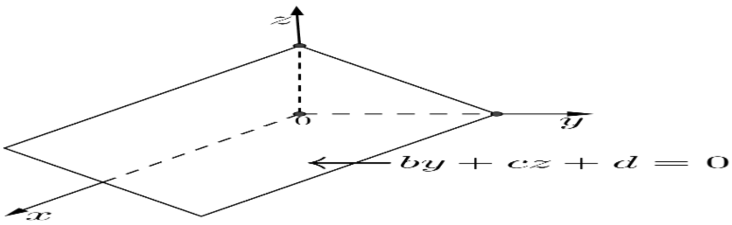
Se o termo independente for nulo o plano conterá a origem.

2.º Caso

a) $\boldsymbol{a = 0 \Rightarrow by + cz + d = 0}(\boldsymbol{comb.c.d \neq 0})$

O Plano é paralelo ao eixo x e intercepta os eixos y e z.

Figura 18 Ilustração geométrica da equação $by + cz + d = 0$



Fonte: Próprio autor

Justificativa: O vetor normal ao plano $by + cz + d = 0$ é $\vec{n} = (0, b, c)$ que é perpendicular ao eixo x.

Logo, o plano é paralelo ao eixo x.

Analogamente, se:

b) $\boldsymbol{b = 0 \Rightarrow ax + cz + d = 0}$ $(\boldsymbol{com\ a, c, d \neq 0})$

O plano é paralelo ao eixo y

c) $\boldsymbol{c = 0 \Rightarrow ax + by + d = 0}$ $(\boldsymbol{com\ a, b, d \neq 0})$

O plano é paralelo ao eixo z

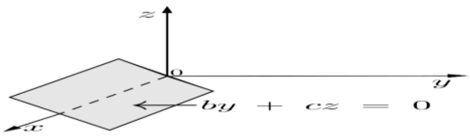
Nota importante: O plano é sempre paralelo ao eixo da coordenada ausente.

3.º Caso:

a) $\boldsymbol{a = d = 0 \Rightarrow by + cz = 0}(\boldsymbol{com\ b, c \neq 0})$

Representa um plano que passa pela origem e portanto, contém o eixo x, neste caso qualquer ponto do tipo $(x, 0,0)$ satisfaz a equação.

Figura 19 Ilustração geométrica da equação $by + cz = 0$



Fonte: Próprio autor

O plano $by + cz = 0$, além de conter a origem (pois $\mathrm{d} = 0$) é paralelo ao eixo x, pois tem como vector normal $\vec{\mathrm{n}} = (0, \mathrm{b}, \mathrm{c})$.

Analogamente, se:

a. $\boldsymbol{b = d = 0, ax + cz = 0\ (com\ a, c \neq 0)}$

O plano conterá o eixo y

b. $\boldsymbol{c = d = 0 \Rightarrow ax + by = 0\ (com\ a, b \neq 0)}$

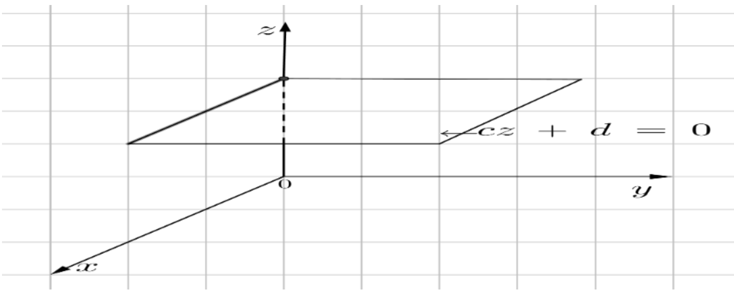
O plano conterá o eixo z

4.º Caso.

a) $\boldsymbol{a = b = 0 \Rightarrow cz + d = 0\ (com\ c, d \neq 0)}$

O plano é paralelo ao plano xy, e é perpendicular ao eixo z

Figura 20 Ilustração geométrica da equação $cz + d = 0$



Fonte: Próprio autor

Justificação: O plano $cz + d = 0$ tem como vector normal $\vec{n} = (0,0,c)$ que é perpendicular ao plano z e é paralelo ao plano xy.

b) $\boldsymbol{b = c = 0 \Rightarrow ax + d = 0\ (com\ a, d \neq 0)}$

O plano é paralelo ao eixo yz.

$Nota$: $se\ ax + d = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-d}{a} \Rightarrow x = k.$

Em particular, x=0 é a equação do plano coordenado yz.

c) $\boldsymbol{a = c = 0 \Rightarrow by + d = 0\ (com\ b, d \neq 0)}$

O plano é paralelo ao plano xy

$$Se\ by + d = 0 \Rightarrow y = \frac{-d}{b} \Rightarrow y = k$$

Em particular, $y = 0$ representa o plano coordenado xz.

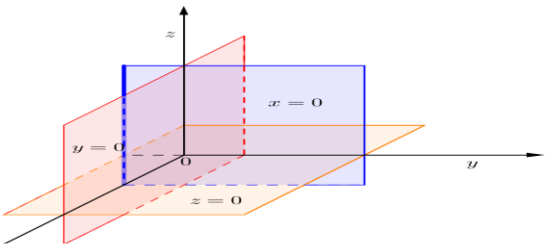
Nota: Se dois dos coeficientes das variáveis forem nulos, a equação representa um plano paralelo ao plano das variáveis que não figuram na equação.

1.4.6.1- Planos paralelos aos planos coordenados

Observe que, os planos cartesianos são casos particulares, onde:

$$\begin{cases} \alpha: x = 0(planos\ y0z) \\ \beta: y = 0(planos\ x0z) \\ \pi: z = 0(planos\ x0y) \end{cases}$$

Figura 21 planos paralelos aos planos coordenados



Fonte: Próprio autor, 2021.

Em função a abordagem feita neste capítulo, estão dados as bases de modo a aplicarmos os algoritmos para a determinação da equação do plano e suas representações gráficas.

CAPÍTULO II- CONJUNTO DE EXERCÍCIOS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PLANO E SUA REPRESENTAÇÃO GRÁFICA

Depois de uma recapitulação das noções básicas de ponto e vector no espaço, neste capítulo, vamos apresentar um conjunto de exercícios para o desenvolvimento das habilidades dos alunos na resolução de equações do plano e sua representação gráfica.

Contudo, começamos por resolver exercícios, apresentando assim algoritmos (passos) que podem facilitar o trabalho dos nossos alunos não apenas na resolução de equações do plano e sua representação gráfica como também na resolução de outros problemas matemáticos.

2.1- Análise do Programa

Segundo INIDE/MED (2019, p. 9) O programa da 11ª Classe Ciências Físicas e Biológicas tem (5) cinco Unidades:

Quadro 1 Plano Temático

Nº	Temas	Cargas lectivas		
		Trimestres	**Horas Lectivas**	**Total**
1	• . Trigonometria	Inicial	8	24
2	Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço. • Perpendiculares de vectores e rectas. Intersecção de planos e rectas no espaço.		12	
3	• Sucessões		4	
3	• Sucessões	Final	15	52
4	Limite de uma sucessão. Número de Neper. • Indução matemática		20	

5	• Estatística		17	

Fonte: Próorio autor

Conforme explicamos anteriormente que, o tema do nosso trabalho, está na segunda Unidade do Programa da 11ª Classe do curso de Ciências Físicas e Biológicas.

O tema que desenvolvemos é um sub item do item

2.3: “Planos. Intersecção de planos e rectas no espaço” (INIDE/MED, 2019, p. 11).

- “Equação de um plano” (INIDE/MED, 2019, p. 11).

No programa não se faz uma concretização do objetivo deste tema, mas faz-se a concretização dos objetivos da unidade, isto é, do produto escalar sua importância e sua aplicação na determinação da distância de um ponto a um plano assim como a interpretação geométrica da intersecção de planos na resolução de sistema de equações.

2.2- Análise do Manual do Aluno

Relativamente ao manual do aluno, podemos constatar que que não se faz um tratamento metodológico da unidade onde faz parte as equações do plano, o que a nosso ver vem ainda mais criar dificuldades aos alunos e Professores na obtenção de conteúdo do tema em estudo.

Desta forma, tendo em consideração as inquietações dos alunos, a falta de um tratamento no manual do aluno, houve a necessidade de se estudar as equações do plano e suas representações gráficas, tendo em conta de sua aplicabilidade na Geometria Analítica, Geometria Descritiva, entre outras áreas do saber.

2.3- Definição de algoritmo

> Um algoritmo é formalmente uma sequência finita de passos que levam a execução de uma tarefa. Podemos pensar em algoritmo como uma receita, uma sequência de instruções que dão cabo de uma meta específica. Estas tarefas não podem ser redundantes nem subjetivas na sua definição devem, gravar um evento (MORAES, 2000, p. 5).

Note que esta definição é válida para todos os casos em que aqui iremos abordar.

Estes algoritmos têm como finalidade:

- ✓ Fornecer poucos passos para determinar as equações de um plano e sua representação gráfica;

- ✓ Facilitar o grau de compreensão na resolução de exercícios que envolvem equações do plano e suas representações gráficas.

Para tal, começamos por apresentar o algoritmo aplicado para o cálculo de equações do plano, bem como os critérios ou técnicas essenciais na resolução das mesmas.

2.3.1- Algoritmo aplicado para determinação da equação do plano que passa por um ponto e ortogonal a um vector usando a equação geral do plano $\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$

Para este caso, aplicar-se-á os seguintes passos:

1º Passo: Identificar o ponto e o vector

2º Passo: Identificar a equação geral

3º Passo: Substituir o ponto e o vector na equação geral

4º Passo: Determinar d resolvendo a equação

5º Passo: Substituir o vector e d na equação geral

6º Passo: Obter a equação geral

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Determinar a equação do plano α que passa pelo ponto $A = (1,3,5)$ e seja ortogonal ao vector $\vec{n} = (2,4,6)$.

Resolução

1º Passo: Identificar o ponto e o vector

$A = (1,3,5);\ x = 1, y = 3, z = 5;\ \vec{n} = (2,4,6); a = 2, b = 4, c = 6$

2º Passo: Identificar a equação geral

$$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$$

3º Passo: Substituir o ponto e o vector na equação geral

$$(2)(1) + (4)(3) + (6)(5) + d = 0$$

4º Passo: Determinar d resolvendo a equação

$$2 + 12 + 30 + d = 0 \Leftrightarrow d = -44$$

5º Passo: Substituir o vector e d na equação geral

$$(2)x + (4)y + (6)z + (-44) = 0$$

6º Passo: Obter a equação geral

$$\alpha: 2x + 4y + 6z - 44 = 0$$

2.3.2- Algoritmo aplicado para determinação da equação do plano determinada por um ponto e por dois vectores

Para a determinação da equação do plano determinada por um ponto e por dois vectores, deve-se ter em conta os seguintes passos do algoritmo:

1º Passo: Identificar o ponto e os vectores

2º Passo: Identificar a fórmula (3)

3º Passo: Substituir os dados na fórmula

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias pela via mais fácil (usando o método de Laplace)

5º Passo: Obter a equação do plano

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Determine a equação cartesiana do plano π que passa pelo ponto $P_0(1,2,3)$ e tem a direção dos vectores $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$.

Resolução:

1º Passo: Identificar o ponto e os vectores

$P_0(1,2,3)$, $\vec{u} = (1, -1, 2)$ e $\vec{v} = (2, 3, -1)$, Sendo $P(x, y, z)$ que pertence ao plano teremos

2º Passo: Identificar a fórmula (3)

3º Passo: Substituir os dados na fórmula

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias pela via mais fácil (usando o método de Laplace)

$$(x-1)(1-6)-(y-2)(-1-4)+(z-3)(3+2)=0$$

$$-5x+5+5y-10+5z-15=0$$

$$-5x+5y+5z-20=0\ /(-5)$$

5º Passo: Obter a equação do plano

$\boldsymbol{\pi}: \boldsymbol{x-y-z+4=0}$

2.3.3- Algoritmo aplicado para determinação da equação do plano determinada por três pontos não colineares

Para determinação da equação do plano determinada por três pontos não colineares, aplicar-se-á os seguintes passos:

1º Passo: Identificar os pontos

2º Passo: Identificar a fórmula (6)

3º Passo: Substituir os dados na fórmula identificada.

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias pela via mais fácil: aplicando a regra de Laplace, teremos:

5º Passo: Obter a equação do plano

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Determine a equação cartesiana do plano β que passa pelos pontos $P_1(-1,2,0)$ $P_2(2,-1,3)$ e $P_3(3,2,-1)$.

Resolução

1º Passo: Identificar os pontos

$P_1(-1,2,0)$, $P_2(2,-1,3)$ e $P_3(3,2,-1)$

2º Passo: Identificar a fórmula (6)

3º Passo: Substituir os dados na fórmula identificada.

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias pela via mais fácil: aplicando a regra de Laplace, teremos:

$$(x+1)(3) - (y-2)(-3-12) + z(12) = 0$$

$$3x + 3 + 15y - 30 + 12z = 0$$

$$3x + 15y + 12z - 27 = 0\ /(3)$$

5º Passo: Obter a equação do plano

$\boldsymbol{\beta}: \boldsymbol{x + 5y + 4z - 9 = 0}$

2.3.4- Algoritmo aplicado para determinação da equação do plano determinada por dois pontos e um vector

Para determinação da equação do plano determinada por dois pontos e um vector, deve-se ter em conta os seguintes passos:

1º Passo: Identificar os pontos e o vector

2º Passo: Identificar a fórmula (8)

3º Passo: Substituir os dados na fórmula

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias pela via mais fácil (usando Laplace teremos)

5º Passo: Obter a equação do plano

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Determine a equação cartesiana do plano θ que passa pelos pontos $P_1(1,0,-2)$ $P_2(-2,1,0)$ e tem a direção do vector $\vec{v} = (3,1,-1)$.

Resolução

1º Passo: Identificar os pontos e o vector

$P_1(1,0,-2)$, $P_2(-2,1,0)$ e $\vec{v} = (3,1,-1)$

2º Passo: Identificar a fórmula (8)

3º Passo: Substituir os dados na fórmula

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z+2 \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias pela via mais fácil (usando Laplace teremos)

$$(x-1)(-1-2) - y(3-6) + (z+2)(-3-3) = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 + 3y - 6z - 12 = 0 \Leftrightarrow$$
$$-3x + 3y - 6z - 9 = 0 \;/(-3)$$

5º Passo: Obter a equação do plano:

$\theta: x - y + 2z + 3 = 0$

2.3.5- Algoritmo aplicado para determinação da equação geral do plano usando as equações vectoriais

Para determinação da equação geral do plano usando as equações vectoriais, aplicar-se-á os seguintes passos do algoritmo:

1º Passo: Identificar os pontos

2º Passo: Identificar a formula vectorial

3º Passo: Substituir os pontos na formula

4º Passo: Obter a equação paramétrica usando o conceito de igualdade de vectores

5º Passo: Eliminar $k\ e\ p$

6º Passo: Obter a equação do plano

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Obter a equação do plano π que contém os pontos $A(3,0,1), B(2,1,1)\ e\ C(3,2,2)$.

Resolução

1º Passo: Identificar os pontos

$A(3,0,1), B(2,1,1)\ e\ \ C(3,2,2)$

2º Passo: Identificar a formula vectorial

Sendo $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano vem

$\boldsymbol{P - A = k(B - A) \ + p(C - A)}$

3º Passo: Substituir os pontos na formula

$$(x-3)\vec{e} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k} = k(-\vec{e} + \vec{j}) + p\left(2\vec{j} + \vec{k}\right)$$

$$(x-3)\vec{e} + y\vec{j} + (z-1)\vec{k} = (-k)\vec{e} + (k+2p)\vec{j} + (p)\vec{k}$$

4º Passo: Obter a equação paramétrica usando o conceito de igualdade de vectores

$x - 3 = -k$

$y = k + 2p$

$z - 1 = p$

5º Passo: Eliminar $k\ e\ p$

Isolando k em 1 teremos

$\boldsymbol{k = -x + 3}$ (1´)

Substituindo $(1´) e$ 3 em 2, teremos

$y = -x + 3 + 2(z - 1)$

6º Passo: Obter a equação do plano

$\pi: x + y - 2z - 1 = 0$

2.3.6- Algoritmo aplicado para determinação da equação geral dos planos que passam por dois pontos

Para determinação da equação geral dos planos que passam por dois pontos, deve-se aplicar os seguintes passos:

1º Passo: Identificar os pontos

2º Passo: Identificar a fórmula

3º Passo: Substituir os pontos nas fórmulas

4º Passo: Realizar as operações algébricas e aritméticas na equação II

5º Passo: Isolar na 2ª equação a, b ou c (nós vamos isolar $\underline{\boldsymbol{a}}$ na 2ª equação)

6º Passo: Substituir a expressão isolada na 1ª equação

7º Passo: Obter uma família de planos

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Determine as equações dos planos que passam pelos pontos $A(2,3,-4)\ e\ B(1,2,2)$

Resolução

1º Passo: Identificar os pontos

$A(2,3,-4) e\ B(1,2,2)$

2º Passo: Identificar a fórmula

$$\boldsymbol{a(x-x_0)+b(\ y-y_0)+c(\ z-z_0)=0(1)}$$

$$\boldsymbol{a(x_1-x_0)+b(\ y_1-y_0)+c(\ z_1-z_0)=0\ (5)}$$

3º Passo: Substituir os pontos nas fórmulas

$$\begin{cases}\boldsymbol{a(x-2)+b(\ y-3)+c(\ z+4)=0}\\ \boldsymbol{a(1-2)+b(2-3)+c(2+4)=0}\end{cases}$$

4º Passo: Realizar as operações algébricas e aritméticas na equação II

$$\begin{cases}\boldsymbol{a(x-2)+b(\ y-3)+c(\ z+4)=0} & \boldsymbol{(I)}\\ \boldsymbol{-a-b+6c=0} & \boldsymbol{(II)}\end{cases}$$

5º Passo: Isolar na 2ª equação a, b ou c (nós vamos Isolar $\underline{\boldsymbol{a}}$ na 2ª equação)

$$\boldsymbol{a=b-6c}$$

6º Passo: Substituir a expressão isolada na 1ª equação

$$\boldsymbol{(b-6c)(x-2)+b(\ y-3)+c(\ z+4)=0}$$

7º Passo: Obter uma família de planos

$$\boldsymbol{(b-6c)(x-2)+b(\ y-3)+c(\ z+4)=0}$$

2.3.7- Algoritmo aplicado para representação gráfica da equação geral do plano

Para fazer a representação gráfica da equação geral do plano, aplicar-se-á os seguintes passos do algoritmo abaixo:

1º Passo: Identificar a equação do plano

2º Passo: Determinar o ponto de intersecção com os eixos $x, y\ e\ z$.

3º Passo: Representar os pontos no plano Cartesiano Tridimensional

4º Passo: Representar um plano que intersecta os três pontos;

5º Passo: Identificar o plano geometricamente com a equação

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Representar geometricamente o plano $\pi: 4x + 3y - z - 12 = 0$ com os eixos coordenados.

1º Passo: Identificar a equação do plano

$\pi: 4x + 3y - z - 12 = 0$

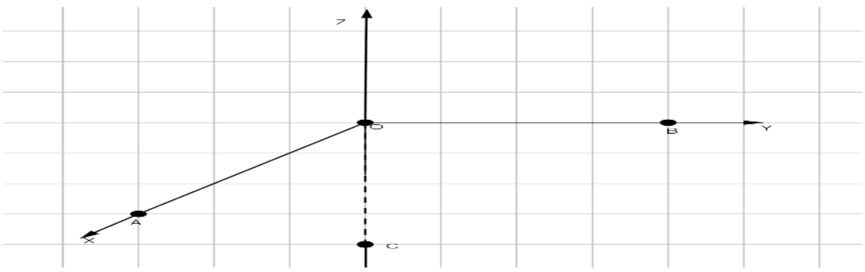
2º Passo: Determinar o ponto de intersecção com os eixos $x, y\ e\ z$.

Fazendo $y = z = 0$ na equação de π: $4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$; $temos\ o\ ponto\ A(3,0,0)$

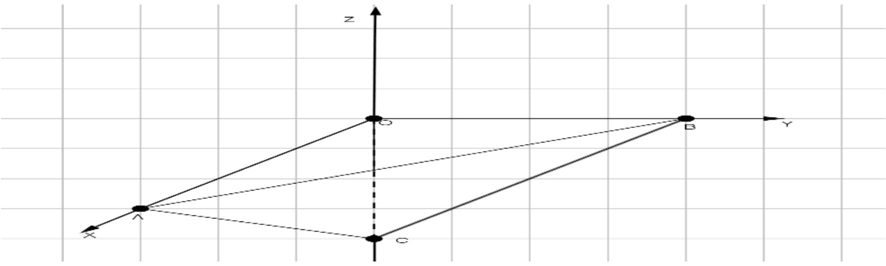
Fazendo $x = z = 0$: $3y - 12 = 0 \Rightarrow y = 4$; $temos\ o\ ponto\ B(0,4,0)$

Fazendo $x = y = 0$: $-z - 12 = 0 \Rightarrow z = -12$; $C(0,0,-12)$

3º Passo: Representar os pontos no plano Cartesiano Tridimensional

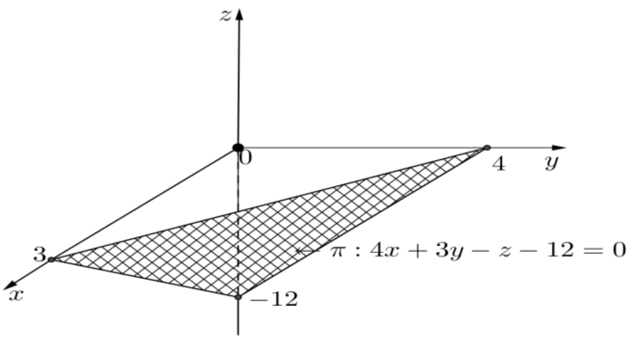


4º Passo: Representar um plano que intersecta os três pontos;



5º Passo: Identificar o plano geometricamente com a equação

Figura 22 Representação gráfica do plano π: 4x+3y-z-12=0



Fonte: Próprio autor

2.3.8- Algoritmo aplicado para representação gráfica da equação do tipo $ax + by + d = 0$

Para fazer a representação gráfica da equação do tipo $ax + by + d = 0$, deve-se aplicar os seguintes passos:

1º Passo: Identificar a equação

2º Passo: Determinar o ponto de intersecção com o eixo x (ponto A) e eixo y ponta B)

3º Passo: Representar o plano $\mathbb{R}^3$ com sua respectiva escala;

4º Passo: Representar os pontos no plano cartesiano tridimensional

5º Passo: Representar um plano paralelo a z e interceptando nos pontos A e B.

6º Passo: Identificar o plano com a equação

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Representar no plano R^3 a equação $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{2x + 3y - 6 = 0}$

1º Passo: Identificar a equação

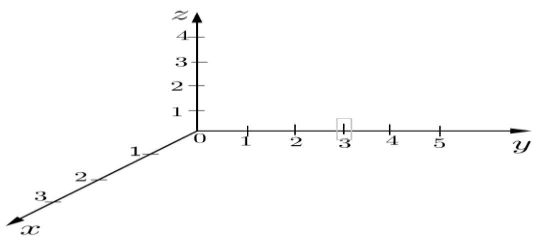
$\boldsymbol{\pi}: \mathbf{2x + 3y - 6 = 0}$ (Equação do plano paralelo ao eixo z)

2º Passo: Determinar o ponto de intersecção com o eixo x (ponto A) e eixo y ponta B)

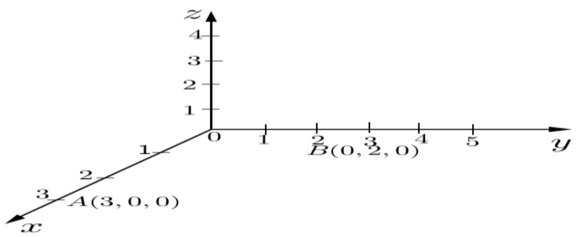
Fazendo $y = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$, teremos o ponto $A(3,0,0)$

Fazendo $x = 0 \Leftrightarrow 3y = 6 \Leftrightarrow y = 2$, teremos o ponto $B(0,2,0)$

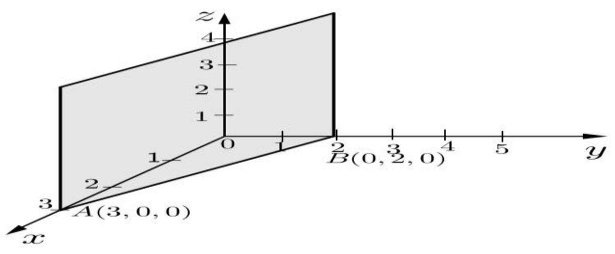
3º Passo: Representar o plano $\mathbb{R}^3$ com sua respectiva escala;



4º Passo: Representar os pontos no plano cartesiano tridimensional

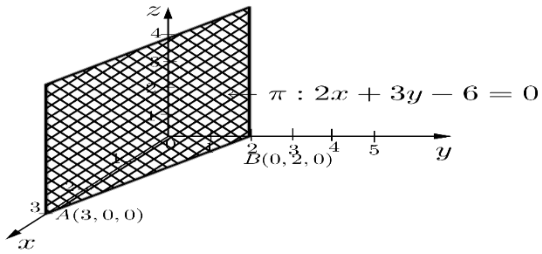


5º Passo: Representar um plano paralelo a z e interceptando nos pontos A e B.



6º Passo: Identificar o plano com a equação

Figura 23 Representação gráfica da equação π: $2x + 3y - 6 = 0$



Fonte: Próprio autor

2.3.9- Algoritmo aplicado para representação gráfica da equação do tipo $ax + by = 0$

Para representação gráfica da equação do tipo $ax + by = 0$, aplicar-se-á os seguintes passos do algoritmo:

1º Passo: Identificar a equação

2º Passo: Determinar dois pontos atribuindo valores a uma das variáveis

3º Passo: Representar o plano $\mathbb{R}^3$ com sua respectiva escala;

4º Passo: Representar os pontos no plano cartesiano tridimensional

5º Passo: Representar o plano que passa pela origem e pelos pontos A e B, paralelo a Z

6º Passo: Identificar o Plano

Exemplo ilustrativo do algoritmo

Determinar geometricamente o plano π: $2x + y = 0$

1º Passo: Identificar a equação

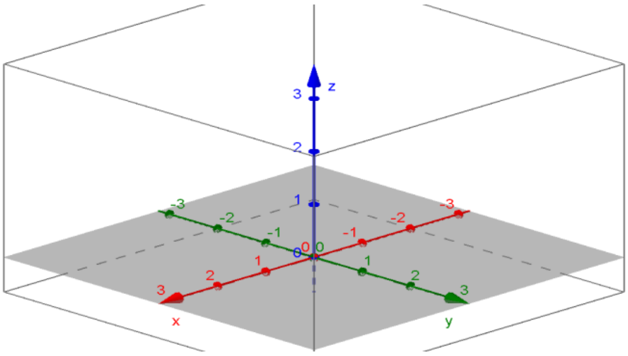
π: $2x + y = 0$

2º Passo: Determinar dois pontos atribuindo valores a uma das variáveis

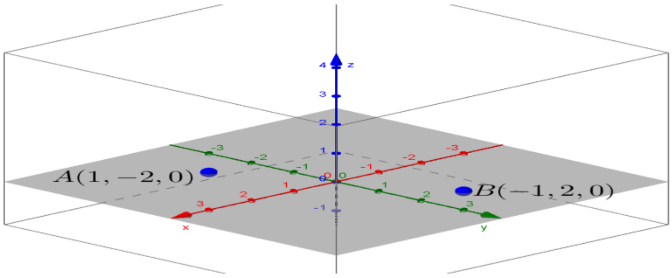
Se $x = 1 \Leftrightarrow y = -2$ Teremos o ponto $A(1, -2, 0)$

$Se\ x = -1 \Leftrightarrow y = 2$ Teremos o ponto $B(-1{,}2{,}0)$

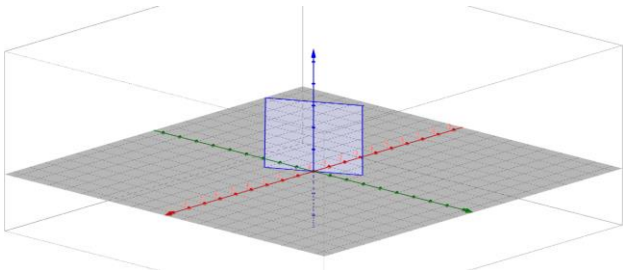
3º Passo: Representar o plano $\mathbb{R}^3$ com sua respectiva escala;



4º Passo: Representar os pontos no plano cartesiano tridimensional

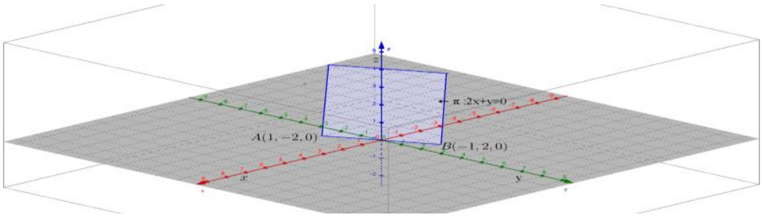


5º Passo: Representar o plano que passa pela origem e pelos pontos A e B, paralelo a Z



6º Passo: Identificar o Plano

Figura 24 Ilustração geométrica da equação π: 2x+y=0



Fonte: Próprio autor

Portanto, foram dados os algoritmos que poderão ajudar os alunos na determinação da equação do plano e suas representações gráficas**.**

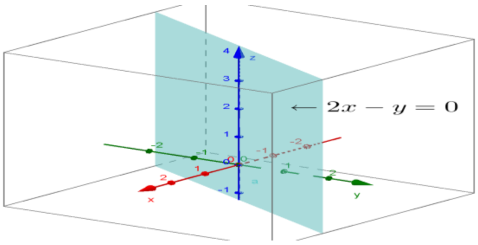
Exercícios propostos

1- Obter a equação do plano que passa por $P = (1,2,1)\ e\ Q = (3,1,-1)$ e seja paralelo ao eixo y.

Resp.:$x + z - 2 = 0$

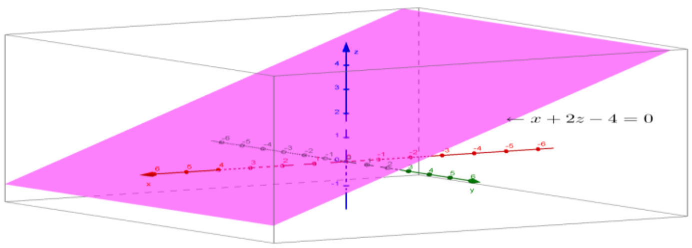
2- Representar geometricamente os planos

a) $\alpha: 2x - y = 0;$



Fonte 2 Próprio autor

b) $\beta: x + 2z - 4 = 0$



Fonte 3 Próprio autor

3- Achar a equação do plano que passa pela origem e é perpendicular $\vec{u} = (2, -1,3)$

Resposta: $2x - y + 3z = 0$

4- Determine a equação geral do plano π que passa por A(2,3,4) e é paralelo aos vectores $\vec{u} = \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$

$\pi: -2x + 4 = 0$

5- Determine a equação do plano π que passa pelo ponto $A(1,2, -1)$ e que corta os eixos coordenados em segmentos iguais: Nota: Usar a equação segmentária do plano.

Resposta: $\pi: x + y + z - 2 = 0$

6- Determinar a equação geral do plano que intercepta os eixos $y\ e\ z$ em segmentos de comprimento de $2\ e\ 2$ e que passa pelo ponto $A(1,3, -3)$.

Resposta: $2x + y - z - 2 = 0$

7- Obter a equação do plano que passa por $P(1,2,1) e\ Q(3,1, -1)$ e seja paralelo ao eixo y. Nota: Neste caso no fim temos de fazer $b = 0$, usar a equação $1\ e\ 5$.

Resposta: $x + z - 2 = 0$

8- Calcular a equação do plano passante por P(1,3,3) e paralelo ao plano xy. Nota usar a equação 1. Sabendo que $a = b = 0$.

Resposta: $z - 3 = 0$

9- Obter a equação do plano que contém o eixo x e ponto $P(1,3,3)$. Nota, usar a equação 1, $sabendo\ que\ a = d = 0$.

Resposta: $y - z = 0$

10- Determina a equação do plano que contém o eixo y e o ponto P(1,2,2). Usar a equação 1, sabendo que $b = d = 0$.

Resposta: $-2x + z = 0$

CAPITULO III: ANALIE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS

Neste capitulo, vamos apresentar os dados colhidos durante a investigação do trabalho que foi desenvolvido na escola Liceu do Sanza Pombo/Uíge aos alunos da 11ª Classe da opção de Ciências Físicas e Biológicas Turma: A, na qual organizamos os mesmo em forma de quadro e gráficos.

3.1- Amostra e sua caracterização

Aplicamos os inquéritos tomando uma amostra igual a população de 22 alunos da 11ª Classe da mesma Escola. Esta amostra, foi constituída de alunos de ambos géneros com idade compreendida entre 16 a 50 anos de idade.

3.2. Pré-teste

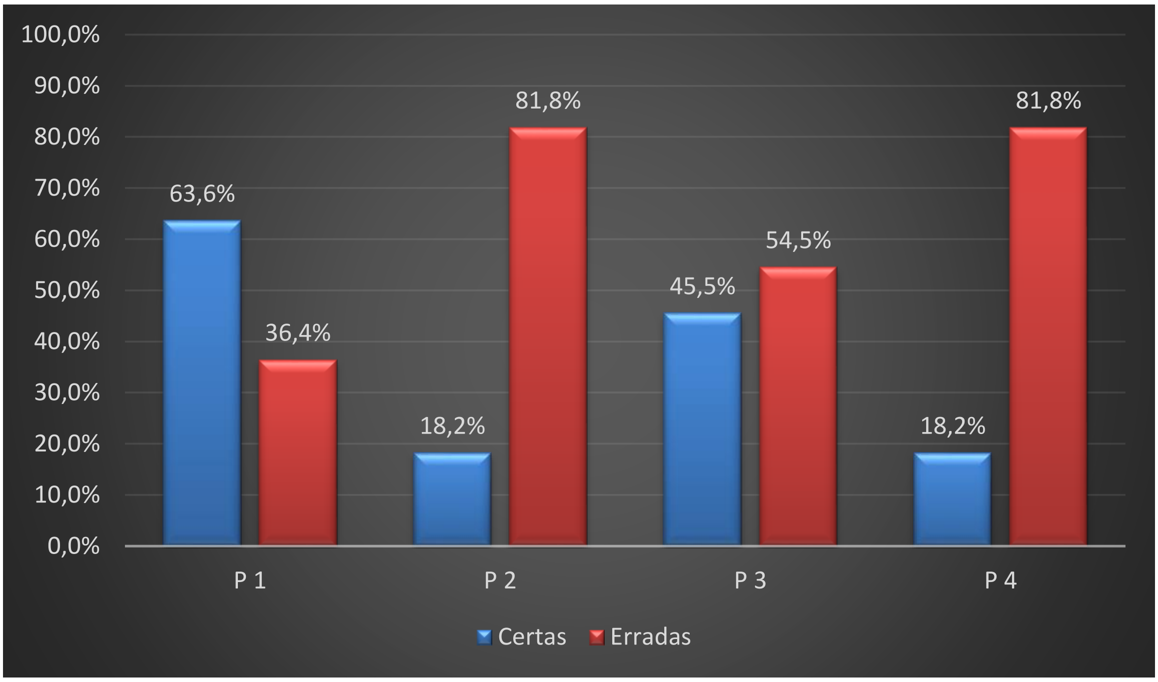
Nesta pesquisa tivemos como um dos obejectivos específicos, «Diagnosticar o estado actual do processo de ensino e aprendizagem das equações do plano e sua representação gráfica na 11ª Classe no Liceu do Sanza Pombo», isto é, para avaliar o nível de seu conhecimento e para servir como pré-requisitos da nossa pesquisa, aplicou-se um teste de diagnóstico (pré-teste) de 4 questões. Para tal vamos apresentar os resultados que tivemos nos quadros e no gráfico a seguir.

Quadro 2 Resultado do pré-teste

Questões	Certas	%	Erradas	%	Total
1ª	14	63,6%	8	36,4%	22
2ª	4	18,2%	18	81,8%	22
3ª	10	45,5%	12	54,5%	22
4ª	4	18,2%	18	81,8%	22

Fonte: Próprio autor

Figura 25 Interpretação gráfica dos resultados do pré-teste



Fonte: Próprio autor

3.2.1- Apresentação das Apreciações obtidas aos Alunos no Pré-Teste

As notas que denominamos de x obtidas pelos alunos variam desde 0 a 14 valores e estão distribuídas como mostra o quadro abaixo.

f_i é a $frequência$ $obsluta$ é o $número$ de $vezes$ que se $realiza$ um $acontecimento$

$fac \downarrow$ $Frequencia$ $aboluta$ $acumulada$ $descendente$

$\bar{x}$ é a $media$ $ponderada$

Mediana é o valor a que corresponde a primeira frequência acumulada maior do que $\frac{n}{2}$.

Quadro 3 Distribuição das notas do pré-teste

X_i	fi	$fac \downarrow$	$X_i . f_i$
0	2	2	0
3	1	3	3
4	9	12	36

5	1	13	5
8	6	19	48
10	1	20	10
13	1	21	13
14	1	22	14
	$\sum = 22$		$\sum = 129$

Fonte: Próprio autor, 2021

a) Média

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_i . f_i)}{n}, onde \sum f_i = n \Rightarrow \bar{x} = \frac{129}{22} \Rightarrow \bar{x} = 5{,}86$$

b) Mediana

Como $n = 22$, é par, então a mediana está entre o elemento de ordem

$\frac{n}{2}\ e\ \frac{n+2}{2}$

$Para\ \frac{n}{2}\ temos\ que$

$\frac{n}{2} = \frac{22}{2} = 11, pela\ fac \downarrow 11º\ elemento$ é 4

$Para\ \frac{n+2}{2}\ temos\ que$:

$\frac{n+2}{2} = \frac{22+2}{2} = \frac{24}{2} = 12, pela\ fac \downarrow o\ 12º\ elemento$ é 4

$\frac{4+4}{2} = \frac{8}{2} = 4, assim\ M_e = 4$

Assim, como a mediana é 4 valores, significa que 50% dos alunos obtiveram uma nota inferior a 4 e 50% obtiveram uma nota superior a 4 valores, sendo 4 valores como a nota mais frequente durante o pré-teste.

c) Moda

“A moda de um conjunto de n números é o valor que ocorre com maior frequência, isto é, o valor mais comum" (BOSQUILHA, CORRÊA, & VIVEIRO, 2003, p. 244).

No nosso caso a moda é $M_0 = 4$, sendo a nota mais frequente, repetindo nove vezes.

3.3- Actuação Pedagógica

De acordo com os dados obtidos no pré-teste, conseguimos perceber que as dificuldades que os alunos apresentaram no conteúdo deste tema é a falta de ministrar as aulas duma forma mais profunda a fim de levar os alunos numa realidade de um conhecimento sustentável sobre a importância da equação do plano e sua representação gráfica.

Para resolvermos este problema, elaboramos passos para mostrarmos como se deve determinar a equação do plano e sua apresentação gráfica.

Para isso realizamos trabalho com os alunos ministrando três aulas, pois que eram suficientes para que os alunos desenvolvessem as suas habilidades nesta área do conhecimento.

Figura 26 Alunos da11ª Classe turma A

Fonte: Próprio autor

3.4- Pós-Teste

Os alunos avaliados anteriormente são os mesmo que nos forneceram os dados no pós-teste que estão representados nos quadros abaixo.

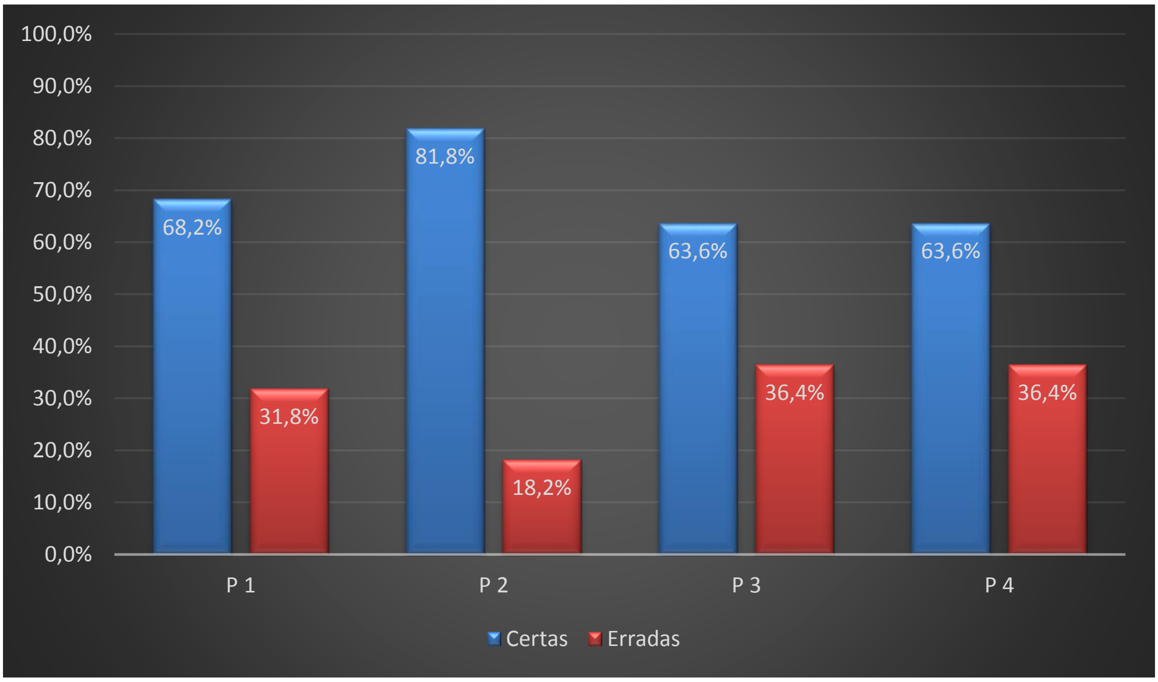
Como realizamos um trabalho com os alunos no pré-teste, houve também necessidade de se aplicar um pós-teste aos mesmos, com objetivo de sabermos se houve desenvolvimento das habilidades dos alunos depois das aulas ministradas, elaborando quatro questões semelhante ao que se aplicou no teste diagnóstico (pré-teste) e permitiu comprovar o êxito do trabalho e que apresentou-se os seus resultados no quadro e gráfico a seguir.

Quadro 4 Resultado do pós-teste

Questões	Certas	%	Erradas	%	Total
1ª	15	68,2%	7	31,8%	22
2ª	18	81,8%	4	18,2%	22
3ª	14	63.6%	8	36,4%	22
4ª	14	63.6%	8	36,4%	22

Fonte: Próprio autor

Figura 27 Interpretação gráfica dos resultados do pós-teste



Fonte: Próprio autor

3.3.1- Apresentação das Apreciações obtidas aos Alunos no Pós-Teste

As notas x dos alunos no pois-teste variam de 4 à 20 valores e estão distribuídas como ilustra o quadro a seguir.

Quadro 5 Distribuição de notas do pós-teste

X_i	fi	$fac \downarrow$	$X_i.f_i$
4	1	1	4
5	2	3	10
9	1	4	9
10	2	6	20
11	1	7	11
12	2	9	24
13	2	11	26
14	2	13	28
16	2	15	32
17	1	16	17
18	1	17	18
20	5	22	100
	$\sum 22$		$\sum 299$

Fonte: Próprio autor

a) Média

$$\bar{x} = \frac{\sum(x_i.f_i)}{n}, onde \sum f_i = n \Rightarrow \bar{x} = \frac{299}{22} \Rightarrow \bar{x} = 13{,}59$$

b) Mediana

Como $n = 22,$ é par, então a mediana está entre o elemento de ordem

$$\frac{n}{2}\ e\ \frac{n+2}{2}$$

$$Para\ \frac{n}{2}\ temos\ que$$

$$\frac{n}{2} = \frac{22}{2} = 11, pela\ fac \downarrow 11º\ elemento\ \text{é}\ 13$$

$$Para\ \frac{n+2}{2}\ temos\ que:$$

$$\frac{n+2}{2} = \frac{22+2}{2} = \frac{24}{2} = 12, pela\ fac \downarrow o\ 12º\ elemento\ \text{é}\ 14$$

$$\frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5;\ assim\ M_e = 13{,}5 \cong 14$$

Assim, como a mediana é 13,5 valores, significa que 50% dos alunos obtiveram uma nota inferior a 13,5 e 50% obtiveram uma nota superior a 13,5 valores, sendo 20 valores como a nota mais frequente durante o pois-teste.

c) Moda

No nosso caso a moda no pois teste é $M_0 = 20,$ sendo a nota mais frequente, repetindo cinco vezes.

Os resultados representados nas tabelas e gráficos do pós-teste são positivos.

3.5- Comparação dos resultados do Pré-Teste e do Pós-Teste

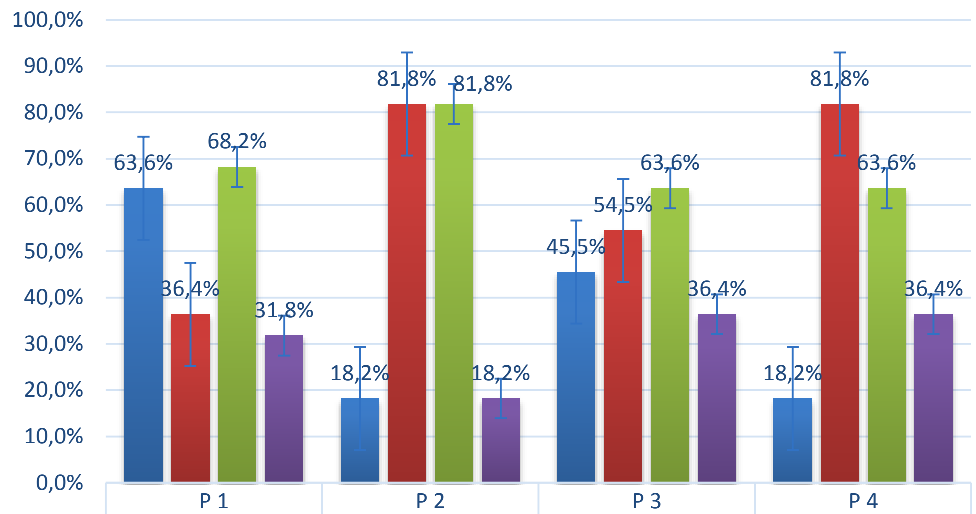
De um modo geral queremos fazer aqui a comparação dos resultados obtidos no pré-teste e pós-teste respectivamente aplicados, comparando os resultados das respostas certas e erradas entre os dois testes em percentagens.

Quadro 6 Comparação dos resultados do Pré-teste e Pós-teste

Pré-teste						Pós-teste				
Questões	Certas	%	Erradas	%	Total	Certas	%	Erradas	%	Total
1ª	14	63,6%	8	36,4%	22	15	68,2%	7	31,8%	22
2ª	4	18,2%	18	81,8%	22	18	81,8%	4	18,2%	22
3ª	10	45,5%	12	54,5%	22	14	63.6%	8	36,4%	22
4ª	4	18,2%	18	81,8%	22	14	63.6%	8	36,4%	22

Fonte: Próprio autor

Figura 28 Gráfico de comparação dos resultados do pré-teste e pós-teste



	P 1	P 2	P 3	P 4
Certas (Pré-teste)	63,6%	18,2%	45,5%	18,2%
Erradas (Pré-teste)	36,4%	81,8%	54,5%	81,8%
Certas (Pós-teste)	68,2%	81,8%	63,6%	63,6%
Erradas (Pós-teste)	31,8%	18,2%	36,4%	36,4%

Certas (Pré-teste) Erradas (Pré-teste) Certas (Pós-teste) Erradas (Pós-teste)

Fonte: Próprio autor

De acordo com a comparação dos resultados obtidos no pré-teste e pós-teste, leva a entender que é possível contribuir no desenvolvimento das habilidades dos alunos na determinação de equação do plano e sua representação gráfica aplicando os passos elaborados.

Portanto, observou-se que os resultados obtidos no pós-teste são mais satisfatórios em relação aos resultados do pré-teste, por este motivo, entende-se que o estudo aplicado é valido.

CONCLUSÕES

O estudo da equação do plano e sua representação gráfica é um campo vasto que envolve várias áreas do saber, a obra que elaborou é um trabalho que nunca terá fim, porém, tudo quanto tratou-se durante o desenvolvimento deste tema é para contribuir no desenvolvimento das habilidades dos alunos na resolução de exercícios que envolvem equações do plano e suas representações gráficas.

Ao longo do estudo realizado, verificou-se que os alunos apresentaram baixo rendimento, mas, logo após a aplicação dos procedimentos definidos no trabalho e posteriormente aplicação do pós-teste, observou-se que os resultados obtidos no pós-teste são mais satisfatórios em relação aos resultados do pré-teste, conforme mostram os quadros e gráficos ilustrados no corpo do trabalho. Portanto, entende-se que o estudo aplicado é valido.

SUGESTÕES

De acordo com o percurso realizado durante o tempo de investigação e interação com os alunos, notamos uma falta de habilidades e limitações por parte dos alunos nesta área do saber, por isso, sugerimos o seguinte:

1) Que os professores de Geometria Descritiva, Matemática no II Ciclo, de E.V.P, Educação Laboral e de Matemática do I Ciclo do Ensino Secundário, comecem a ensinar os alunos como usarem a régua e a sua escala.
2) Que os Professores do Liceu do Sanza Pombo aprofundem os conteúdos deste tema nas suas aulas.
3) Que Direcção da Escola do Liceu do Sanza Pombo coloque a sala de informática a disposição dos alunos de modo a aprenderem a determinar geometricamente um plano por meio de alguns softwares educativos.
4) Que os professores venham a usar este trabalho para a elaboração de suas aulas, isto é, como material de apoio nas suas pesquisas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOSQUILHA, A., CORRÊA, M. L., & VIVEIRO, T. C. (2003). *Minimanual Compacto de Matemática Ensino Médio Teoria Prática* (2ª ed.). São Paulo: Rideel.

FREITAS, R. L., & NASCIMENTO, P. H. (n.d.). *Geometria Analítica.* Bahia: FTC.

FRENSEL, K., & DELGADO, J. (2011). *Geometria Analítica.* Rio de Janeiro: UFMA.

GOMES, F. A. (2008). Matemática basica 2. Conceitos básicos de geometria.

INIDE/MED. (2019). Programa de Matemática - 10ª, 11ª, 12ª Classes (Área de Ciências Físicas e Biológicas). p. 21.

MAYER, F. d. (n.d.). Introdução à Estatística e conceitos de amostragem. p. 44.

MIRANDA, D., GRISI, R., & LUDOVICI, S. (2015). *Geometria Anlítica e Vectorial.* Brasil: Universidade Federal do ABC.

MORAES, P. S. (2000). *Curso Básico de Lógica de Programação.* Unicamp.

RABELLO, P. S. (2005). GEOMETRIA DESCRITIVA BÁSICA.

RUSCHEINSKY, D. (2008). *Apostila da Disciplina de Álgebra Linear e Geometria Analítica.* Jundiai.

SANTOS, F. B. (n.d.). *Sebenta de Matemática 11º ano de escolaridade* (Vol. II). PARALELO EDITOR.

SANTOS, R. J. (2012). *Um curso de Geometria e Álgebra Linear.* Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG.

SCHOR, D., & TIZZIOTTI, J. G. (1975). *Matemática Segundo Grau* (2ª ed.). São Paulo: Ática.

SILVA, A. d., & COSTA, G. M. (2014). *Equações do primeiro grau.* Rio de Janeiro.

VENTURA, J. J. (2015). *Álgebra vectorial e Geometria Analítica* (9ª e 10ª ed.). Curitiba: Livraria de curitiba.

WINTERLE, P. (2007). *Vetores e Geometria Analítica.* São Paulo: Pearson Makron Books.

ZANELLA, L. C. (2013). *Metodologia de Pesquisa.* Brazil: UFSC.

APÊNDICES

APÊNDICE A

INQUÉRITO APLICADO AOS ALUNOS (PRÉ-TESTE)

Estimado aluno (a), este inquérito visa diagnosticarmos o seu actual estado referente ao ensino da equação do plano e sua representação gráfica, com a finalidade de contribuirmos no melhoramento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, de modo a realizarmos um trabalho de pesquisa para obtenção de grau de licenciatura em Ciências de Educação, na opção de ensino de Matemática. Esperamos de si a sua cooperação nas questões abaixo mencionadas:

Sexo: M ____ F ____ Idade______ Data ____/____/2020

1. Assinalar com x, qual das equações abaixo representa equação geral ou completa do plano no espaço?

a) $2y + 3x + z - 9 = 0$ b) $y^2 + 2y + 1 = 0$ c) $3x + 3x + 2y = 0$

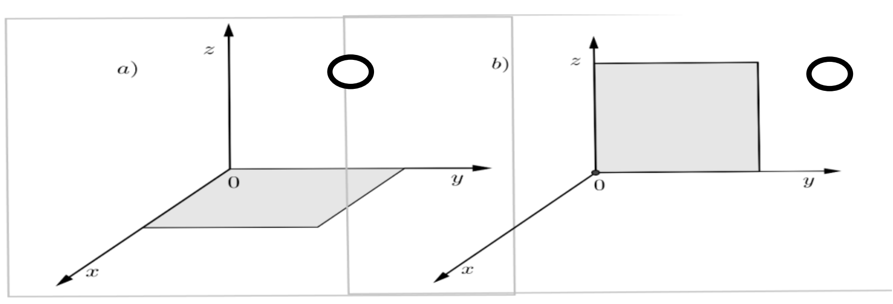
2. Sabendo que a equação geral do plano é dada na forma $ax + by + cz + d = 0$; a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $P(1, -1,2)$ e é perpendicular ao vector $\vec{v} = (2, -3,1)$ é:

a) $x - y - 2y + 2z + 2 = 0$

b) $2x - 3y + z + 1 = 0$

c) $x + x + z - 3y - 7 = 0$

3. Considere a equação $\pi: z = 0$ identique o plano entre as figuras abaixo:



4. Representar geometricamente a equação $2x + 3y - 6 = 0$ no espaço

BOM TRABALHO!

APÊNDICE B

Plano de Aula

Escola: Liceu do Sanza Pombo **Duração: 45 min**

Disciplina: Matemática **Classe: 11ª**

Número de Alunos: 22 **Tipo de aula: Nova**

Período: Manhã **O professor: Victorino Camungo Jaime**

Unidade II: Produto escalar de dois vectores no plano e no espaço. Perpendiculares de vectores e rectas. Intersecção de planos e rectas no espaço

Assunto: Equação de um plano que passa por um ponto P e tem $\vec{n}$ como vector normal

Método de ensino: Elaboração conjunta e trabalho independente

Meios de ensino: Quadro, giz, apagador

Objectivo especifico: Determinar a equação cartesiana de um plano que passa por um ponto P e tem $\vec{n}$ como vector normal.

INTRODUÇÃO

A.N.P: O que represente a equação $x + 2y = 4$, no plano?

No plano a expressão $x + 2y = 4$ representa a equação de uma recta

Motivação: O que represente a equação $x + 2y = 4$, no espaço?

No plano a expressão $x + 2y = 4$ representa a equação de um plano

O.P.O: Na aula de hoje vamos aprender como determinar a equação de um plano

TRATAMENTO DIDÁCTICO

Seja A(x_0,y_0,z_0) um ponto pertencente a um plano π e $\vec{n} = (a, b, c)$, $\vec{n} \neq \vec{0}$, um vector normal ao plano.

Como $\vec{n} \perp \pi, \vec{n}$ é ortogonal a todo vector representado em π. Então, um ponto P(x, y, z) pertence a π se e somente se, o vector $\overrightarrow{AP}$ é ortogonal a $\vec{n}$. isto é:

$\vec{n}.\overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow \vec{n}\,.(P - A) = 0$

$(a, b, c).(x - x_0, y - y_0, z - z_0)=0$

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y_0}) + \boldsymbol{c}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z_0}) = 0$ Equação dos planos que passam por um ponto

$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0$

Fazendo: $-ax_0 - by_0 - c\,z_0 = d$

$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ Está é a equação geral de um plano Onde a, b e c são componentes vectoriais.

Exemplo: $a)$ $\pi: x + y - z + 4 = 0$; π: representa uma equação completa do plano, onde $(1,1,-1)$ são componentes do vector normal ao plano

$\alpha: x + 2y + 4 = 0$; α: Representa a equação incompleta de um plano paralelo ao z. Onde (1,2,0) são componentes do vector normal ao plano.

Para determinarmos a equação do plano que passa por um ponto P e tem $\vec{n}$ como vector normal, podemos recorrer a dois artifícios: Usando a equação geral ou usando o cálculo do produto escalar.

Usando a equação geral, temos os seguintes passos:

1º Passo: Identificar o ponto e vector

2º Passo: Identificar a equação geral do plano

3º Passo: Substituir o ponto e o vector na equação geral

4º Passo: Determinar o valor de d

5º Passo: Substituir o vector e d na equação geral

6º Passo: Obter a equação geral do plano

Exemplos:

Determinar a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(2,-1,3)$ e tem $\vec{n} = (3,2,-4)$ como um vector normal.

Resolução

1º Passo: Identificar o ponto e o vector

$A(2,-1,3)$ $\vec{n} = (3,2,-4)$

2º Passo: Identificar a equação geral do plano

$ax + by + cz + d = 0$

3º Passo: Substituir o ponto e o vector na equação geral

$$3(2) + 2(-1) + (-4)(3) + d = 0$$

4º Passo: Determinar o valor de d

$6 - 2 - 12 + d = 0 \Rightarrow -8 + d = 0 \Rightarrow d = 8$

5º Passo: Substituir o vector e d na equação geral

$(3)x + (2)y + (-4)z + 8 = 0$

6º Passo: Obter a equação geral do plano

$\pi: 3x + 2y - 4z + 8 = 0$

Usando o cálculo do produto escalar temos os seguintes passos

1º Passo: Identificar o ponto e o vector

$A(2, -1, 3)\ \vec{n} = (3, 2, -4)$

2º Passo: Identificar a fórmula

$\boldsymbol{\vec{n}.(\overline{AP}) = 0 \Leftrightarrow \vec{n}.(P - A) = 0}$

3º Passo: Substituir o ponto e vector na fórmula

$(3, 2, -4).(x - 2, y - (-1), z - 3) = 0$

4º Passo: Realizar as operações aritméticas e algébricas necessárias

$3x - 6 + 2y + 2 - 4z + 12 = 0$

5º Passo: Obter a equação do plano

$\pi: 3x + 2y - 4z + 8 = 0$

Consolidação

Conforme observamos, para determinarmos a equação geral de um plano que passo podemos utilizar um dos dois procedimentos, Pois nos levam a um mesmo resultado.

AVALIAÇÃO

1- Qual das equações abaixo representam a equação completa de um plano?

$a)\ 2x + 4y + 6z - 44 = 0 \quad b)\ y^2 + 2y + 1 = 0 \quad c)\ 2x + z + 4 = 0$

Resposta: $a)\ 2x + 4y + 6z - 44 = 0$

2- Determinar a equação do plano α que passa pelo ponto $A = (1,3,5)$ e seja ortogonal ao vector $\vec{n} = (2,4,6)$.

Resposta: $\alpha: 2x + 4y + 6z - 44 = 0$

TAREFA PARA CASA

1- Determinar a equação cartesiana do plano β que passa pelo ponto $P(1,-1,2)$ é perpendicular ao vector $\vec{v} = (2,-3,1)$.

Resposta

1º Passo: Identificar o ponto e vector

$P(1,-1,2), \vec{v} = (2,-3,1)$

2º Passo: Identificar a equação geral do plano

$ax + by + cz + d = 0$

3º Passo: Substituir o ponto e o vector na equação geral

$2(1) + (-3)(-1) + (1)(2) + d = 0$

4º Passo: Determinar o valor de d

$2 + 3 + 2 + d = 0 \Rightarrow 7 + d = 0 \Rightarrow d = -7$

5º Passo: Substituir o vector e d na equação geral

$(2)x + (-3)y + (1)z + (-7) = 0$

6º Passo: Obter a equação geral do plano

$\beta: 2x - 3y + z - 7 = 0$

APÊNDICE C

INQUÉRITO APLICADO AOS ALUNOS (PÓS-TESTE)

Estimado aluno (a), este inquérito visa diagnosticarmos o seu actual estado referente ao ensino da equação do plano e sua representação gráfica, com a finalidade de contribuirmos no melhoramento do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, de modo a realizarmos um trabalho de pesquisa para obtenção de grau de licenciatura em Ciências de Educação, na opção de ensino de Matemática. Esperamos de si a sua cooperação nas questões abaixo mencionadas:

Sexo: M ____ F ____ Idade______ Data ____/____/2020

5. Assinalar com x, qual das equações abaixo representa equação geral ou completa do plano no espaço?

b) $2y + 3x + z - 9 = 0$ b) $y^2 + 2y + 1 = 0$ c) $3x + 3x + 2y = 0$

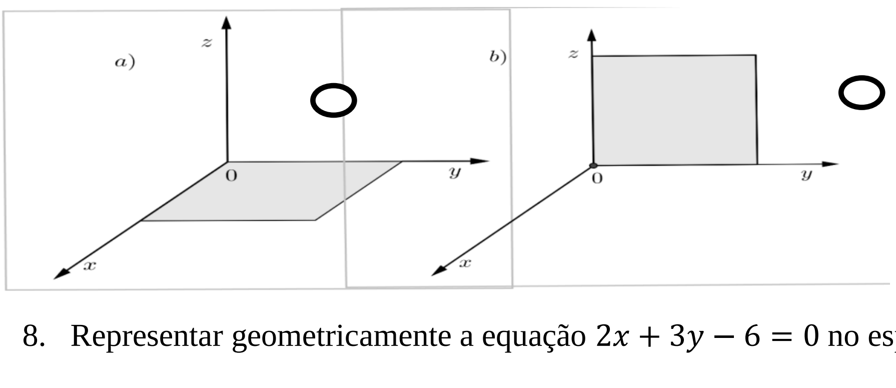
6. Sabendo que a equação geral do plano é dada na forma $ax + by + cz + d = 0$; a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $P(1, -1,2)$ e é perpendicular ao vector $\vec{v} = (2, -3,1)$ é:

d) $x - y - 2y + 2z + 2 = 0$

e) $2x - 3y + z + 1 = 0$

f) $x + x + z - 3y - 7 = 0$

7. Considere a equação $\pi{:}\, z = 0$ identique o plano entre as figuras abaixo:



8. Representar geometricamente a equação $2x + 3y - 6 = 0$ no espaço

BOM TRABALHO!