

# Modelado de Sistemas Difusos de Múltiples Entradas y Salidas.

Cepeda-Negrete, J.

Cita:

Cepeda-Negrete, J. (2011). *Modelado de Sistemas Difusos de Múltiples Entradas y Salidas* (Tesis de Licenciatura). Universidad de Guanajuato DICIS, Salamanca, México.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/jcepedanegrete/7>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/pa8v/2aK>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.  
Para ver una copia de esta licencia, visite  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

*Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.*



**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**

---

---

División de Ingenierías  
Campus Irapuato-Salamanca

**MODELADO DE SISTEMAS DIFUSOS DE  
MÚLTIPLES ENTRADAS Y SALIDAS**

**TESIS PROFESIONAL**

**PARA OBTENER EL TÍTULO DE:**

**INGENIERO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA**

**P R E S E N T A:**

**Jonathan Cepeda Negrete**

Asesor:

Dr. Raúl Enrique Sánchez Yáñez

Salamanca, Gto.

Febrero del 2011

# Agradecimientos

---

A mi mamá **Maria Magdalena Negrete Solís**, quién confió en mí y me apoyó en todo momento de mi formación, tanto como persona y como profesionista. Por enseñarme a vivir y estar conmigo siempre.

A mi hermano **Eduardo Cepeda Negrete**, con quién he vivido grandes momentos y con quién he podido confiar en todo momento. Por estar a mi lado todo este tiempo y compartir conmigo grandes alegrías.

A mi asesor **Dr. Raúl Enrique Sánchez Yáñez**, que siempre me apoyó con mi trabajo. Por señalarme los puntos importantes a la información y proveerme del material necesario. Por ser un amigo más que un profesor, y permitirme compartir momentos agradables, tanto académicos como sociales. Por sus consejos y pláticas motivacionales.

Al **Dr. Victor Ayala Ramirez** por su apoyo y consejos diarios. Por el espacio otorgado en el laboratorio y por sus conocimientos compartidos.

A **Pamela**, con quién he compartido momentos maravillosos, quién me ha enseñado a vivir alegremente y quién me impulsa día a día a seguir adelante. Por estar conmigo en las buenas y en las malas.

A mis familiares, quienes siempre han estado al pendiente de mí y de mi progreso académico, musical y personal.

A mis compañeros del LaViRIA, por todo el tiempo compartido, pláticas y consejos diarios, por escucharme, por compartir ideas, por cada uno de los momentos, tanto en la cafetería, cenas, seminarios, etc. Considero a cada uno importante para mí, pero en especial agradezco el tiempo compartido y su amistad a **Rocío, Geovanni, Alejandro Mota, Salvador, Marco, Arturo, Fernando, Juan Pablo, Luis Eduardo, Xochilt, Briseida, Uriel, Gemma**.

A mi grupo musical **Zogam**, con quien compartí muchos momentos agradables, y que siempre me apoyaron en comprensión de tiempo al realizar mis estudios. Y por su gran amistad.

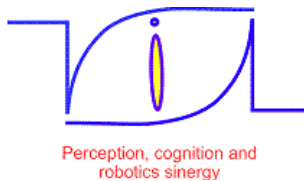
A cada uno de mis amigos y seres queridos por enseñarme algo en algún momento de mi vida. Sin ese aprendizaje no sería la persona que soy ahora.

A mi padre **Rodolfo Cepeda Guerra**, por mostrarme que en la vida hay que llegar lejos, por enseñarme grandes cosas, en especial a superarme día con día, a valorarme, a ver más allá de mis ojos. Por enseñarme que el estudio es mi camino, por haber participado directa e indirectamente en la formación de persona que soy ahora, y con la que estoy orgulloso de ser. Gracias por todo, papá. En paz descanses.

# Agradecimientos Institucionales

---

Al LaViRIA, por el espacio brindado, por la enseñanza diaria, por brindarme un equipo de trabajo y de amigos. Por en enseñarme que la investigación es camino agradable y con el cual me identifiqué. Por brindarme de información necesaria para mi formación académica y personal.



A mi Universidad de Guanajuato, que gracias a su apoyo educativo, he tenido un sitio dónde estudiar y formarme como profesionista de calidad.



A la División de Ingenierías Campus Irapuato-Salamanca (DICIS) antes Facultad de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Electrónica (FIMEE), por todo el apoyo brindado al ofrecer excelentes profesores, por sus actividades, por el entorno confortable y que promueve el estudio, y a quien agradezco la formación de Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica.



A la Secretaría de Educación Pública (SEP) que hace posible ofrecer educación de calidad gratuita por medio de universidades como lo es la Universidad de Guanajuato, haciendo posible que muchos estudiantes como yo, terminemos una carrera. Así mismo, agradecer por sus becas ofrecidas mediante distintos programas, en especial por la recibida por la realización del proyecto de esta tesis.



# Índice General

---

Índice General	II
Índice de Tablas	V
Índice de Figuras	VI
Resumen	1
<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Lógica difusa ( <i>Fuzzy Logic</i> ) . . . . .	2
1.2. Conjuntos difusos . . . . .	3
1.3. Funciones de membresía y características . . . . .	5
1.3.1. Características de las funciones de membresía . . . . .	5
1.4. Variables lingüísticas . . . . .	9
1.5. Clasificación de los sistemas difusos . . . . .	9
1.5.1. Sistemas puros de lógica difusa (Tipo 1) . . . . .	10
1.5.2. Sistemas difusos del tipo Takagi-Sugeno (Tipo 2) . . . . .	11
1.5.3. Sistemas difusos con difusificador y desdifusificador (Tipo 3) . . . . .	12
1.6. Identificación de modelos . . . . .	13
<b>2. Modelado difuso de sistemas</b>	<b>15</b>
2.1. Modelado difuso . . . . .	15

2.1.1.	Metodología para el desarrollo de un sistema difuso . . . . .	16
2.1.2.	Partes del modelo difuso . . . . .	18
2.1.3.	Difusificación ( <i>fuzzification</i> ) . . . . .	18
2.1.4.	Inferencia . . . . .	20
2.1.5.	Desdifusificador . . . . .	20
2.2.	Modelo de Takagi y Sugeno . . . . .	22
2.2.1.	Introducción . . . . .	22
2.2.2.	Reglas difusas y algoritmo de inferencia . . . . .	23
2.2.3.	Algoritmo de Identificación . . . . .	27
2.2.4.	Identificación de los parámetros en los consecuentes . . . . .	29
2.2.5.	Identificación de los parámetros en las premisas . . . . .	31
2.2.6.	Elección de las variables en las premisas . . . . .	33
<b>3.</b>	<b>Metodología de modelado para la identificación de sistemas</b>	<b>37</b>
3.1.	Identificación de la estructura . . . . .	38
3.1.1.	Adquisición de la evidencia numérica . . . . .	38
3.2.	Identificación de los parámetros en las premisas . . . . .	41
3.2.1.	Creación de los conjuntos difusos . . . . .	42
3.2.2.	Conjuntos igualmente distribuidos . . . . .	43
3.2.3.	Construcción de conjuntos por Fuzzy C-Means . . . . .	44
3.3.	Identificación de parámetros en los consecuentes . . . . .	46
<b>4.</b>	<b>Pruebas y resultados para la identificación de funciones de una variable</b>	<b>47</b>
4.1.	Identificación y Aproximación del modelo para una variable . . . . .	47
4.1.1.	Identificación de los parámetros en los consecuentes . . . . .	48
4.2.	Resultados del Modelo para una entrada . . . . .	49
4.2.1.	Función 1 . . . . .	49
4.2.2.	Función 2 . . . . .	54



4.2.3. Función 3 . . . . .	56
4.3. Ejemplo de posible aplicación en el análisis de textura . . . . .	60
<b>5. Pruebas y resultados para la identificación de funciones en dos y tres variables de entrada</b>	<b>62</b>
5.1. Identificación y Aproximación de modelos de 2 variables de entrada . . . . .	62
5.2. Resultados del Modelado para dos entradas . . . . .	64
5.2.1. Identificación de funciones prueba en rango de [-50, 50] . . . . .	64
5.2.2. Identificación de funciones prueba en el rango de [-100, 100] . . . . .	79
5.3. Identificación de modelos para tres variables de entrada . . . . .	85
5.4. Resultados del Modelo para tres entradas . . . . .	85
5.4.1. Función 1 . . . . .	85
5.4.2. Función 2 . . . . .	87
5.4.3. Función 3 . . . . .	88
5.4.4. Función 4 . . . . .	89
5.5. Discusión de los resultados . . . . .	90
<b>6. Conclusiones</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>94</b>

# Índice de Tablas

---

1.1. Operadores lógicos difusos . . . . .	11
5.1. Valores de correlación de acuerdo al número de particiones de las variables de entrada para $z = x + y + \eta(0, 5) [-50, 50]$ . . . . .	66

# Índice de Figuras

---

1.1. Conjuntos clásicos. . . . .	4
1.2. Conjuntos difusos. . . . .	5
1.3. Funciones de membresía triangular. . . . .	6
1.4. Funciones de membresía trapezoidal. . . . .	6
1.5. Funciones de membresía Gaussiana. . . . .	6
1.6. Características de una función de membresía. . . . .	7
1.7. Conjuntos difusos. <i>a) Normal, b) Subnormal.</i> . . . . .	7
1.8. a) Conjunto difuso normal y convexo, b) Conjunto difuso normal y no convexo, c) Intersección de conjuntos convexos. . . . .	8
1.9. Valores lingüísticos de velocidad . . . . .	9
1.10. Sistema puro de lógica difusa. . . . .	10
1.11. Sistema difuso del tipo Takagi-Sugeno. . . . .	12
1.12. Sistema difuso con difusificador y desdifusificador. . . . .	13
2.1. Ciclo de Desarrollo de Modelos Difusos [16]. . . . .	17
2.2. Difusificación tipo <i>singleton</i> . . . . .	19
2.3. Área formada por las membresías de los conjuntos. . . . .	21
2.4. Desdifusificación por centro de área. . . . .	21
2.5. Premisas y consecuentes del Ejemplo 2. . . . .	25
2.6. Resultado de la inferencia difusa. . . . .	27
2.7. Resultado de la inferencia difusa en el Ejemplo 2. . . . .	28

2.8. Esquema del algoritmo de identificación. . . . .	29
2.9. Datos de entrada-salida. . . . .	31
2.10. Consecuentes y datos con ruido. . . . .	34
2.11. Elección de variables en las premisas. . . . .	36
3.1. Función $f(x) = \sin(x)$ . . . . .	39
3.2. Función $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$ . . . . .	40
3.3. Función $f(x) = \sin(x)$ discretizada. . . . .	41
3.4. Función $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$ de forma discreta. . . . .	41
3.5. Función $f(x) = \sin(x)$ ruidosa y de forma discreta. . . . .	42
3.6. Función $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$ ruidosa. . . . .	42
3.7. Conjuntos difusos con función lineal o función de triángulo rectángulo. . . . .	43
3.8. Conjuntos difusos con función de triángulo acutángulo. . . . .	43
3.9. Identificación de las premisas igualmente distribuidas. . . . .	44
3.10. Identificación de las premisas por Fuzzy C-Means. . . . .	45
4.1. Función muestreada $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-7,7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	49
4.2. Función muestreada $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-7,7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme. . . . .	50
4.3. Función muestreada $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	51
4.4. Función muestreada $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme. . . . .	52
4.5. Función muestreada $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-20,20]$ , 6 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	52
4.6. Función muestreada $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-20,20]$ , 6 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme. . . . .	53
4.7. Función muestreada $(\frac{x}{2})^2 + \eta(0, 0.35)$ $[-7,7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	54

4.8. Función muestreada $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \eta(0, 0.35)$ $[-7,7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme. . . . .	55
4.9. Función muestreada $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \eta(0, 0.35)$ $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	55
4.10. Función muestreada $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \eta(0, 0.35)$ $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme. . . . .	56
4.11. Función muestreada $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	57
4.12. Función muestreada $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por distribución uniforme. . . . .	57
4.13. Función muestreada $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-15,15]$ , 10 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	58
4.14. Función muestreada $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-15,15]$ , 10 conjuntos difusos e identificación por distribución uniforme. . . . .	58
4.15. Función muestreada $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-20,20]$ , 14 conjuntos difusos e identificación por FCM. . . . .	59
4.16. Función muestreada $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$ $[-20,20]$ , 14 conjuntos difusos e identificación por distribución uniforme. . . . .	59
4.17. Imagen original. . . . .	60
4.18. Imagen de textura obtenida de acuerdo al modelo identificado. . . . .	60
4.19. Imagen original umbralizada. . . . .	61
4.20. Imagen procesada y umbralizada. . . . .	61
5.1. (a) Función original $z = x + y$ y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	64
5.2. Función aproximada $z = x + y + \eta(0, 5)$ $[-50,50]$ . . . . .	65
5.3. Gráfica de índices de correlación de la Función $z = x + y + \eta(0, 5)$ . . . . .	66
5.4. Superficie para índices de correlación de la Función $z = x + y + \eta(0, 5)$ . . . . .	67
5.5. (a) Función original $z$ y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	68

5.6. Función $z$ aproximada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	69
5.7. Gráfica de índices de correlación de la Función $z = \frac{1}{2} + 64 \left( \frac{(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{8})}{1+(4x-2)^2+(4y-2)^2} \right) + \eta(0, 5)$ . . . . .	69
5.8. Superficie para índices de correlación de la Función $z = \frac{1}{2} + 64 \left( \frac{(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{8})}{1+(4x-2)^2+(4y-2)^2} \right) + \eta(0, 5)$ . . . . .	70
5.9. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	71
5.10. Función $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$ aproximada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	72
5.11. Gráfica de índices de correlación de la Función $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$ . . . . .	72
5.12. Superficie par índices de correlación de la Función $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$ . . . . .	73
5.13. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	74
5.14. Función $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$ aproximada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	75
5.15. Gráfica de índices de correlación de la Función $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$ . . . . .	75
5.16. Superficie para índices de correlación de la Función $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$ . . . . .	76
5.17. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	77
5.18. Función $z = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 + \eta(0, 100)$ aproximada en el rango $[-50,50]$ . . . . .	78
5.19. Gráfica de índices de correlación de la Función $z = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 + \eta(0, 100)$ . . . . .	78
5.20. Superficie para índices de correlación de la Función $z = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 + \eta(0, 100)$ . . . . .	79
5.21. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-100,100]$ . . . . .	80
5.22. Función $z = x + y + \eta(0, 5)$ aproximada en el rango $[-100,100]$ . . . . .	80
5.23. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-100,100]$ . . . . .	81
5.24. Función $z$ aproximada en el rango $[-100,100]$ . . . . .	81
5.25. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango $[-100,100]$ . . . . .	82

5.26. Función $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$ aproximada en el rango [-100,100]. . .	82
5.27. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango [-100,100]. . . . .	83
5.28. Función $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$ aproximada en el rango [-100,100].	83
5.29. (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango [-100,100]. . . . .	84
5.30. Función $z$ aproximada en el rango [-100,100]. . . . .	84
5.31. Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 1. . . . .	85
5.32. Error del modelo en la Función 1. . . . .	86
5.33. Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 2	87
5.34. Error del modelo en la Función 2 . . . . .	88
5.35. Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 3	88
5.36. Error del modelo en la Función 3 . . . . .	89
5.37. Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 4	90
5.38. Error del modelo en la Función 4 . . . . .	90

# Resumen

---

El modelado difuso de múltiples entradas y salidas, es un proyecto que hace uso de gran parte de lo estudiado por la lógica difusa (*fuzzy logic*), razón por la cual se hablará de las bases de esta ciencia.

Como bien es nombrado, el trabajo *Modelado de Sistemas Difusos de Múltiples Entradas y Salidas*, orienta a la construcción de modelos difusos que nos permitan obtener la solución a un problema que involucre a más de una variable en su entrada.

Se discute acerca del modelado difuso, en especial, para múltiples entradas y salidas, basándose en la metodología para la identificación propuesta por Takagi y Sugeno.

La identificación, es la obtención de la estructura de un sistema y de los parámetros relacionados que han sido estimados a partir de evidencia numérica. Estos sistemas pueden tener diferentes orígenes, desde físicos hasta puramente matemáticos.

Así, se desarrolla el modelado efectuado para la identificación de sistemas, el cual estará basado con el modelado de Takagi y Sugeno. Además, se hacen consideraciones particulares en varios aspectos como son: la identificación de las premisas en la estructura y la evaluación de nuestro modelo.

La identificación y aproximación de funciones es la aplicación en la cual se basa el trabajo. Aproximar una función es una forma simple y concreta para verificar el funcionamiento del modelado analizado en este trabajo.

Se verifica y analiza el trabajo con distintas pruebas y se discuten los resultados correspondientes a cada una de ellas.



---

# Capítulo 1

## Introducción

---

En este capítulo se presentan los conceptos que nos permitirán comprender mejor el trabajo. Algunos de ellos son: lógica difusa, conjuntos difusos, variables lingüísticas, etc. Posteriormente, se discuten los distintos tipos de sistemas difusos. Y finalmente, se explica un poco sobre la identificación.

### 1.1. Lógica difusa (*Fuzzy Logic*)

Lotfi A. Zadeh, matemático, científico y profesor de ciencias de la computación en la Universidad de California, estableció la teoría de los conjuntos difusos (*fuzzy sets*) y la lógica difusa en los años 60's. Ahora, las aplicaciones con lógica difusa se han extendido y consolidado hasta estar presentes en la mayoría de los campos de la ingeniería [6]. En la actualidad, la lógica difusa es utilizada en muchas aplicaciones tanto industriales como comerciales; en la optimización de recursos energéticos, como electricidad y combustible; en electrodomésticos, cámaras digitales, vehículos, bases de datos y claro está, en sistemas de control y robótica.

Las razones primordiales por las cuales se ha tenido gran aceptación sobre este tema son: la sencilla comprensión de los sistemas difusos, la forma sencilla en representar cualitativamente el conocimiento del problema y la capacidad de adaptarse con pocos cambios en sus parámetros, a casos particulares.

Lo principal en la lógica difusa es que, a diferencia de la lógica clásica, pretende

modelar la imprecisión del razonamiento, lo cual juega un papel importante en la habilidad humana de tomar decisiones racionales en un mundo de incertidumbre y de falta de precisión [16]. Así, la Lógica Difusa es una teoría de la percepción y el entendimiento humano, que trata con el grandioso paradigma y la metodología descubierta por la evolución y que se implementa en nuestros cerebros para tratar con la complejidad, dinamismo y caos en el mundo en que vivimos [13].

Una razón importante por la que Zadeh se motivó a introducir las nociones de la lógica difusa y los conjuntos difusos [18], fue que observó que el conocimiento del mundo real no tiene una estructura como la de los sistemas formales existentes hasta entonces y requiere una solución diferente.

Los seres humanos, en especial los niños, aprendemos rápidamente a implementar y comprender las instrucciones difusas, por ejemplo, “no llegues tarde”, “ve y corre rápido”, “duérmete temprano”, entre muchos más. Estamos acostumbrados a emplear datos difusos, la información imprecisa es parte de la naturaleza humana, al igual que los problemas que resolvemos diariamente, sin la necesidad de recurrir a métodos matemáticos estrictos, ni información exacta. Siendo así, los modelos computacionales de los sistemas reales deberían al igual ser capaces de reconocer, representar, manipular, interpretar y usar la incertidumbre tanto difusa como estadística.

Se puede señalar que la principal finalidad de la lógica difusa es de proporcionarnos conceptos y técnicas formales orientadas computacionalmente, para tratar un razonamiento aproximado en vez de uno exacto [15].

## 1.2. Conjuntos difusos

La mayoría de los fenómenos que encontramos en nuestra vida diaria tienen implícito un cierto grado de difusidad en la descripción de su naturaleza. Esta imprecisión puede estar asociada con su forma, posición, color, tamaño, o incluso en la semántica que describe lo que son. En muchos casos, el concepto mismo puede tener diferentes grados de imprecisión en diferentes contextos o tiempos.

Zadeh propuso extender la noción de membresía binaria a membresía difusa en donde se pueden tener varios grados de membresía en el intervalo continuo real  $[0, 1]$ , a diferencia de los conjuntos clásicos, en donde cada valor es representado en un conjunto como verdadero o falso,  $\{0, 1\}$ , pertenece o no pertenece, como se representa en la Figura 1.1. Las funciones que mapean el eje horizontal en el intervalo unitario mencionado, pueden considerarse conjuntos difusos, véase la Figura 1.2. Puede observarse que valores en el rango entre 0 y 5 adquieren un grado de membresía de 1 para el conjunto A; de 15 a 20 para el conjunto B, al igual 30 a 35 para el C. Evaluando valores entre 5 a 15 y entre 20 a 30 podemos observar que se va adquiriendo diferente grado de membresía, y lo más importante, pertenencia en más de un conjunto difuso.

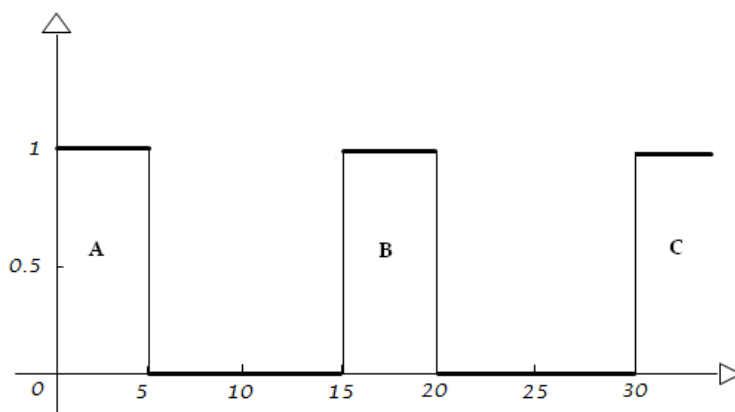


Figura 1.1: Conjuntos clásicos.

Los conjuntos difusos constan de tres propiedades importantes: El rango de valores en el que se mapea el conjunto, recibiendo el nombre de dominio; el eje de membresía, asignando un grado que mide el dominio de un valor de membresía en un conjunto; y por último la superficie del conjunto difuso.

Zadeh delineó operaciones clásicas aplicadas a los conjuntos difusos. Se caracterizan las operaciones en términos de  $\mathfrak{F}(X) =$  todos los subconjuntos de  $X$ . O sea que,  $m \in \mathfrak{F}(X) \Leftrightarrow m : X \rightarrow [0, 1]$ .

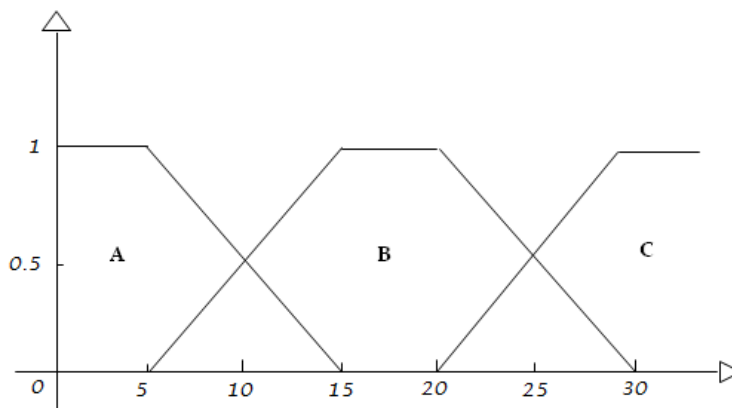


Figura 1.2: Conjuntos difusos.

Sean los conjuntos difusos  $m_A, m_B \in \mathfrak{F}(X)$ . Se define  $x \in X$ :

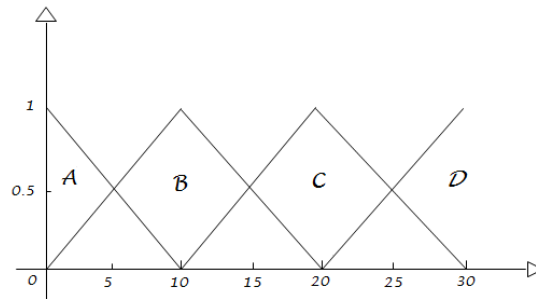
- (=) Igualdad  $A = B \Leftrightarrow m_A(x) = m_B(x)$
- ( $\subset$ ) Inclusión  $A \subset B \Leftrightarrow m_A(x) \leq m_B(x)$
- ( $\sim$ ) Complemento  $\sim m_A(x) = 1 - m_A(x)$
- ( $\cap$ ) Intersección  $m_{A \cap B}(x) = \min\{m_A(x), m_B(x)\}$
- ( $\cup$ ) Unión  $m_{A \cup B}(x) = \max\{m_A(x), m_B(x)\}$

### 1.3. Funciones de membresía y características

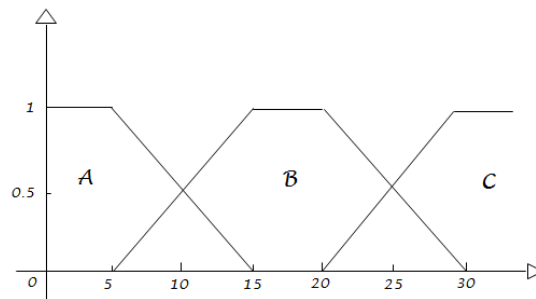
Se entiende por funciones de membresía, a todos los conjuntos difusos que nos permiten medir el grado en que los objetos pertenecen a dichos conjuntos y que satisfacen la propiedades definidas imprecisamente. Las funciones de membresía pueden ser representadas de múltiples formas, las más comunes son: triangulares (Figura 1.3), trapezoidales (Figura 1.4) y gaussianas (Figura 1.5).

#### 1.3.1. Características de las funciones de membresía

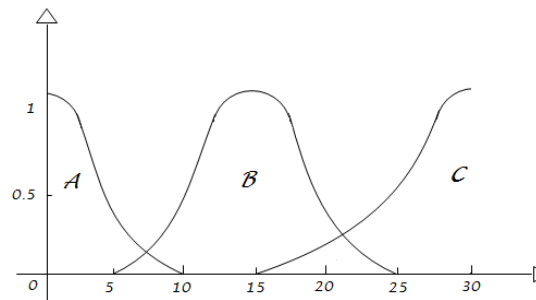
Veamos a continuación las partes que conforman una función de membresía, y una breve descripción de ellas; véase la Figura 1.6.



**Figura 1.3:** Funciones de membresía triangular.



**Figura 1.4:** Funciones de membresía trapezoidal.



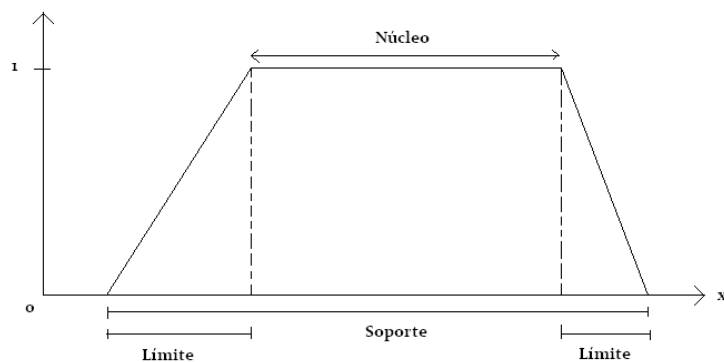
**Figura 1.5:** Funciones de membresía Gaussiana.

**El núcleo** de una función de membresía  $\mu$  para un conjunto difuso  $A$ ,  $\mu_A$ , está formado por todos aquellos elementos  $x$  del universo de discurso tales que  $\mu_A(x) = 1$ .

**El soporte** de una función de membresía para un conjunto difuso cualquiera, está dado

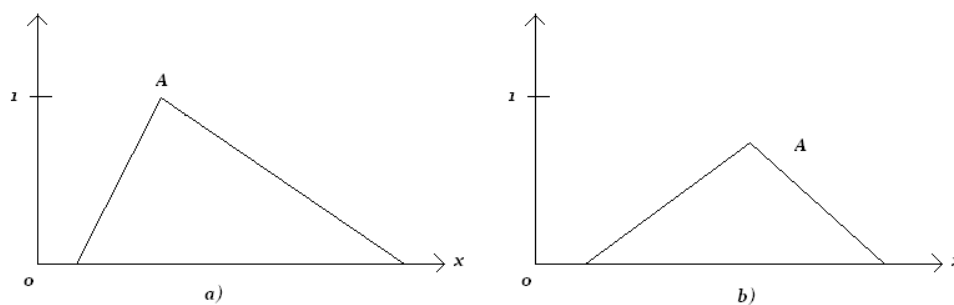
por la región del universo de discurso en donde la membresía es un valor diferente de cero, de tal manera que son aquellos valores que cumplen con:  $\mu_A(x) > 0$ .

**Los límites** de un conjunto difuso  $A$  son definidos como las regiones del universo que contienen a aquellos elementos cuya función de membresía es diferente de cero pero sin llegar a la membresía completa, es decir,  $0 < \mu_A(x) < 1$ .



**Figura 1.6:** Características de una función de membresía.

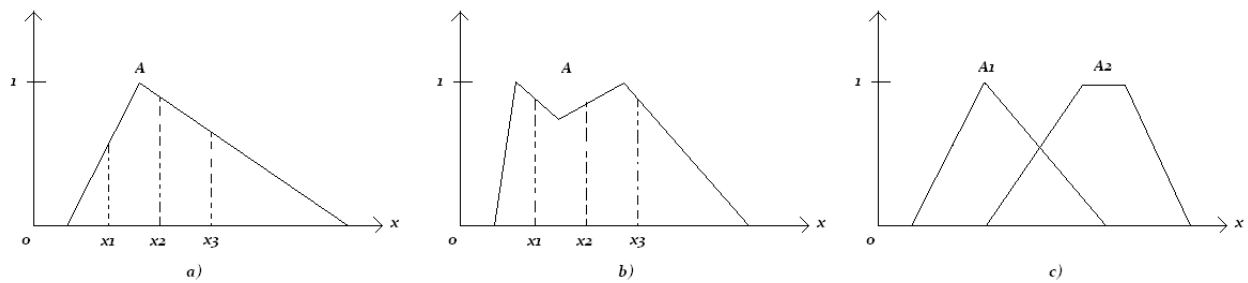
**Un conjunto normal** es aquel que su función de membresía tiene al menos un elemento  $x$  en el cual el valor de membresía es igual a la unidad. A este elemento en particular se le denomina *prototipo del conjunto o elemento prototipo*, lo cual está representado en la Figura 1.7a). Así mismo, se presenta un conjunto subnormal en la Figura 1.7b).



**Figura 1.7:** Conjuntos difusos. a) Normal, b) Subnormal.

**Un conjunto difuso convexo** está descrito por una función de membresía en la que sus valores son de forma estricta monotónicamente crecientes (que a medida que el valor de un elemento  $x$  en el universo de discurso aumenta, su valor de membresía

aumenta) o en su caso, monótonicamente decreciente. Una característica especial de los conjuntos convexos se presenta en la intersección de dos conjuntos  $A_1$  y  $A_2$ , siendo ésta también un conjunto convexo. Puede observarse en la Figura 1.8 una combinación de conjuntos convexos.



**Figura 1.8:** a) Conjunto difuso normal y convexo, b) Conjunto difuso normal y no convexo, c) Intersección de conjuntos convexos.

**La altura** de un conjunto difuso  $A$  es considerada como el máximo valor de la función de membresía  $\max(\mu_A(x))$ . Si la altura del conjunto es menor que la unidad, entonces se da el caso de un conjunto difuso subnormal; obsérvese la Figura 1.7

## 1.4. Variables lingüísticas

En la vida cotidiana manejamos palabras u oraciones en un lenguaje natural o sintético. Una Variable Lingüística es aquella variable cuyos valores son expresados en este lenguaje. Por ejemplo, “Velocidad” es una variable lingüística, si sus valores son “muy lento”, “lento”, “rápido” y “muy rápido” (véase en la Figura 1.9), siendo éstos valores denominados como etiquetas lingüísticas.

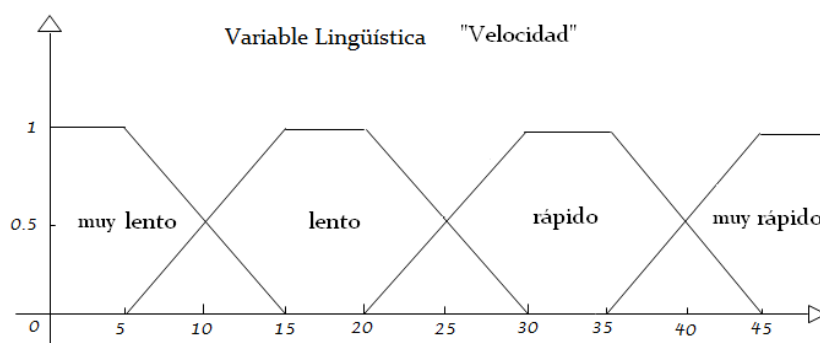


Figura 1.9: Valores lingüísticos de velocidad

Los valores de las variables lingüísticas pueden ser generados gramaticalmente a decisión propia, tomando como partida algún término primario como “lento” y su antónimo “rápido”, junto con sus modificadores (“poco”, “muy”, “casi”, etc).

Cada valor de una variable lingüística contiene un conjunto de valores representando una distribución de posibilidad. Ésta puede ser asignada empíricamente o a partir de la distribución de posibilidad dada para el término primario y su antónimo [16].

## 1.5. Clasificación de los sistemas difusos

Según Wang [14], se denominan *sistemas difusos* a aquellos sistemas que contienen relación con los términos difusos y la lógica difusa. La mayoría de estos sistemas pueden ser clasificados en tres diferentes tipos de categorías: *Sistemas puros de lógica difusa (Tipo 1)*, *Sistemas difusos Takagi-Sugeno (Tipo 2)*, y *Sistemas Difusos con difusificador y desdifusificador*.



### 1.5.1. Sistemas puros de lógica difusa (Tipo 1)

Básicamente, la configuración que mantienen estos sistemas se muestra en la Figura 1.10. Aquí la base de reglas difusas consiste en una colección de reglas del tipo *SI...ENTONCES*, y la máquina de inferencia difusa utiliza estas reglas para *mapear* los conjuntos difusos del universo de entrada  $U \subset R^n$  a los conjuntos difusos en el universo de salida  $V \subset R$ . Las reglas difusas del tipo *SI...ENTONCES* tienen la siguiente forma:

$$R^l : \text{SI } x_1 \text{ es } F_n^l \text{ y...y } x_n \text{ es } F_n^l \text{ ENTONCES } y \text{ es } G^l \quad (1.1)$$

donde  $F_i^l$  y  $G^l$  son conjuntos difusos,  $\underline{x} = (x_1 \dots x_n)^T \in U$  y  $y \in V$  son las variables lingüísticas de entrada y salida respectivamente, y  $l = 1, 2, \dots, M$ .

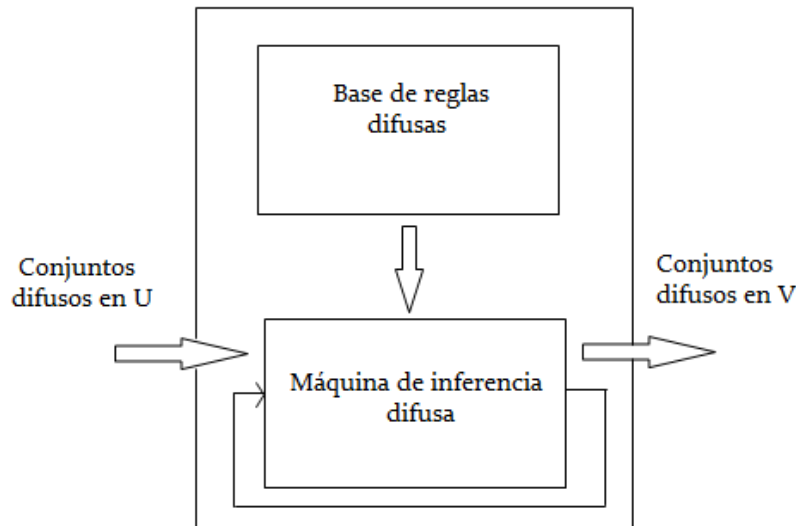


Figura 1.10: Sistema puro de lógica difusa.

Cada regla dentro de la base define un conjunto difuso  $F_1^l x, \dots, F_n^l x \rightarrow G^l$  en el espacio del producto  $U \times V$ . Con los conjuntos difusos se pueden realizar la mayoría de las operaciones que se realizan en los conjuntos clásicos o concretos. Los operadores lógicos más comunes son los mostrados en la Tabla 1.1. Donde  $\mu_A(x)$  representa el valor de membresía de  $x$  al conjunto difuso A.

Tabla 1.1: Operadores lógicos difusos

operador	
NOT	$1 - \mu_A(x)$
AND	$\mu_A(x) \cap \mu_B(x)$ T-norma
OR	$\mu_A(x) \cup \mu_B(x)$ T-conorma

Las bases de reglas de los sistemas difusos se construyen básicamente utilizando los operadores AND y OR. Una proposición del tipo AND se llama también una *T-norma* o *norma triangular*. Una proposición del tipo OR se llama también una *T-conorma* o *co-norma triangular*. Lotfi A. Zadeh propuso que para la T-norma se utilizara el mínimo de los dos valores de membresía presentes en la proposición, mientras que para la T-conorma se utilizara el máximo.

La forma en que se encuentran constituidas las reglas en la Ecuación 1.1 proporciona un marco práctico de trabajo para la síntesis del conocimiento humano. Este tipo de sistemas constituyen una parte primordial dentro de los sistemas difusos, pues a través de la base de reglas, el conocimiento cualitativo de un experto puede ser usado de manera sistemática y eficiente. La principal desventaja de estos sistemas es el hecho de que tanto las entradas como las salidas del sistema son conjuntos difusos, mientras que en la mayor parte de los problemas reales de ingeniería, las entradas y las salidas de los sistemas son valores numéricos [7].

### 1.5.2. Sistemas difusos del tipo Takagi-Sugeno (Tipo 2)

Existe otro sistema propuesto y es conocido como Takagi-Sugeno o tipo 2, y se propuso en 1985. La principal distinción y característica de este sistema se encuentra en las reglas. Aunque la regla tiene la forma *SI ...ENTONCES* el producto de la inferencia de esta regla no es un conjunto difuso. En su lugar, la regla produce una función lineal de las entradas. A continuación se muestra la estructura.

$$L^{(l)} : \text{SI } x_1 \text{ es } F_n^l \text{ y...y } x_n \text{ es } F_n^l, \text{ ENTONCES } y^l = C_0^l + C_1^l x_1 + \dots + C_n^l x_n \quad (1.2)$$

donde  $F_i^l$  son conjuntos difusos,  $C_i$  son parámetros reales,  $y^l$  es la salida del sistema debido a la regla  $L^{(l)}$ , y  $l = 1, 2, \dots, M$  como se aprecia en la Ecuación 1.2, las entradas

son conjuntos difusos y la salida es una combinación lineal de los valores que entran. Teniendo un vector real de entrada  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ , la salida  $y(\underline{x})$  de un sistema tipo 2, Takagi-Sugeno, es un promedio de las ponderaciones de las  $y^l$ :

$$y(\underline{x}) = \frac{\sum_{l=1}^M \omega^l y^l}{\sum_{l=1}^M \omega^l} \quad (1.3)$$

donde la ponderación  $\omega^l$  se aplica para todo el rango permitido de valores en la regla  $L^{(l)}$ , la salida es calculada como:

$$\omega^l = \prod_{i=1}^n \mu_{F_i^l}(x_i) \quad (1.4)$$

Una configuración general del tipo Takagi-Sugeno se muestra en la Figura 1.11.

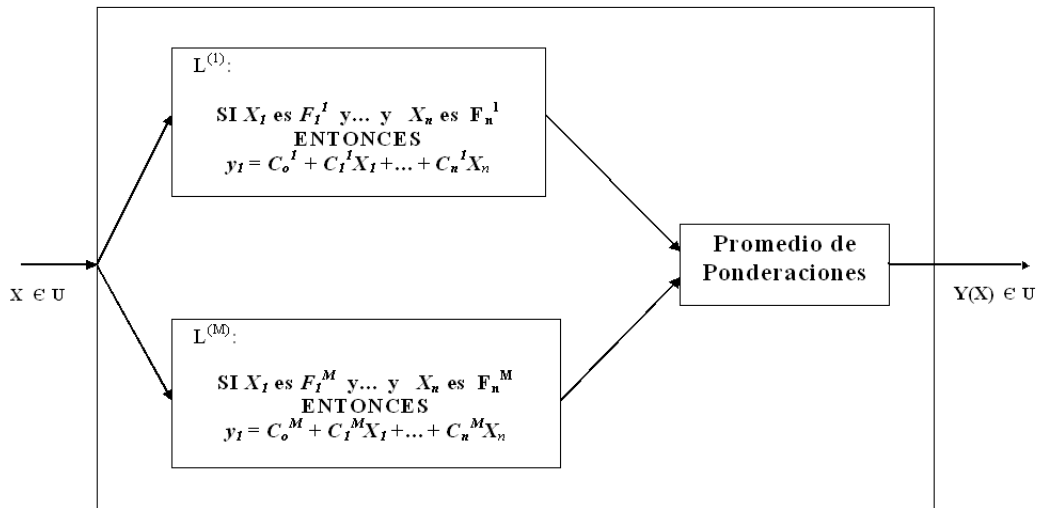


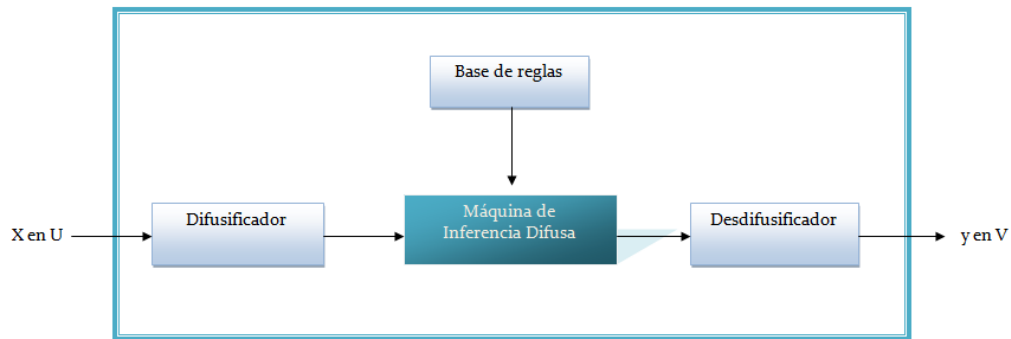
Figura 1.11: Sistema difuso del tipo Takagi-Sugeno.

Una ventaja primaria e importante de este tipo de sistema, es que nos proporciona un conjunto de ecuaciones lineales para poder estimar la salida del sistema.

### 1.5.3. Sistemas difusos con difusificador y desdifusificador (Tipo 3)

Estos sistemas mantienen la estructura de un sistema puro de lógica difusa como base del sistema, la diferencia está en que las entradas al sistema son valores numéricos

reales. La gran mayoría de los problemas en el área la ingeniería se rigen por valores numéricos tanto en entrada como en la salida, sobre todo en sistemas de control. La parte principal de este sistema es que es un sistema de lógica puro, existe un marco flexible para la integración del conocimiento, lo que no es posible en los sistemas del Tipo 2. Una ventaja es que existe variedad para diseñar la difusificación y la desdifusificación. La configuración general de un sistema difuso con difusificador y desdifusificador se muestra en la Figura 1.12.



**Figura 1.12:** Sistema difuso con difusificador y desdifusificador.

## 1.6. Identificación de modelos

Los modelos difusos han sido usados en sistemas que presentan incertidumbre, carencias de información, modelado complicado o en procesos mal definidos. Problemas como éstos se presentan en el procesamiento de imágenes, reconocimiento de patrones, visión por computadora, entre otros. Es sabido que los sistemas basados en lógica difusa no presentan una solución exacta al problema, pero si un resultado aproximado con un alto grado de semejanza a la correcta solución, el sistema que se propone en este trabajo de tesis es aplicado a la aproximación de funciones a partir de evidencia numérica [8]. La estructura del sistema y los parámetros relacionados han sido estimados a partir de evidencia numérica generalmente disponible como muestras de entrada-salida.

---

En el capítulo se resumen los términos más destacados de la lógica difusa y del trabajo, permitiendo una mejor comprensión a las secciones posteriores.

En el siguiente capítulo se explicará el modelado difuso en aspectos generales. Así mismo, se analiza el modelado propuesto por Takagi y Sugeno, el cual es una buena opción para modelar sistemas con múltiples variables.

# Modelado difuso de sistemas

---

Este capítulo trata acerca del modelado difuso; en particular, del modelado difuso para múltiples entradas y salidas, basándose en la aproximación de Takagi y Sugeno, la cual se explicará detalladamente.

Inicialmente, se comenta acerca del modelado difuso en general, pasando luego a la descripción del método propuesto entradas por Takagi y Sugeno para múltiples entradas y salidas.

## 2.1. Modelado difuso

Un modelo difuso es considerado como el intento de formar el modelo de un sistema empleando una descripción lingüística con base en la lógica difusa, con predicados difusos [16]. Esto es, que dicho modelo no contiene ecuaciones matemáticas ni fórmulas lógicas convencionales, siendo su base la lógica difusa para describir dicho modelo lingüístico.

Podríamos interpretar de manera más amplia el modelado difuso como un esquema de modelado cualitativo mediante el cual se describe el comportamiento del sistema empleando un lenguaje natural. De manera específica, sería una descripción del sistema mediante cantidades difusas, que se expresan en términos de números difusos o conjuntos difusos asociados con una etiqueta lingüística. Dichos conjuntos son asociados mediante reglas difusas de control que se derivan a partir de la experiencia de un operador humano

y/o conocimiento ingenieril, basándose en mayor parte en su conocimiento cualitativo de un sistema objetivo. Siendo esta aproximación denominada *similar a sistema experto* [11].

El objetivo de un sistema experto difuso es considerar hechos parcialmente verdaderos, que son aleatoriamente distribuidos en un espacio de muestras, y construir un sistema experto basado en conocimiento, que aplicará ciertas estrategias de razonamiento y de agregación para tomar decisiones útiles. Estas decisiones son también aproximadas y tienen grados parciales de verdad y probabilidad; las decisiones y los actos derivados de ellas, son confiables de acuerdo a nuestro mejor conocimiento disponible. El hecho importante de estos sistemas es que las decisiones hechas por ellos pueden ser mejoradas iterativamente y/o adaptivamente, y conforme tales hechos difusos/aleatorios se acumulen, los resultados convergirán a hechos reales precisos [13].

Por naturaleza del modelado difuso, un experto puede rápida y sucintamente delinear la forma burda de un conjunto difuso a través del dominio de una variable de control. Las aproximaciones son buenos puntos de comienzo y dan buenos resultados. Luego se pueden refinar los conjuntos difusos, ya sea haciéndolo uno mismo de forma manual o a través de mecanismos de retroalimentación adaptivos, conforme probemos el modelo y evaluemos cada caso [3] [4].

Un modelo difuso puede expresar una relación funcional altamente no lineal a pesar de un número pequeño de reglas. El algoritmo simple de identificación de este modelo es: [11]

1. Elegir las estructuras de premisas y consecuentes.
2. Estimar los parámetros de la estructura determinada en (1).
3. Evaluar el modelo.

### 2.1.1. Metodología para el desarrollo de un sistema difuso

Es muy importante hacer un buen desarrollo del diseño de sistemas difusos ya que sigue siendo relativamente novedoso para muchos diseñadores, quienes, en consecuencia,

aún no cuentan con mucha experiencia. Esto puede considerarse como una guía.

Los modelos difusos, ya sean empleados en control de procesos o tecnología de la información, tienden a seguir un mismo ciclo de desarrollo para las aplicaciones, como se muestra en la Figura 2.1.

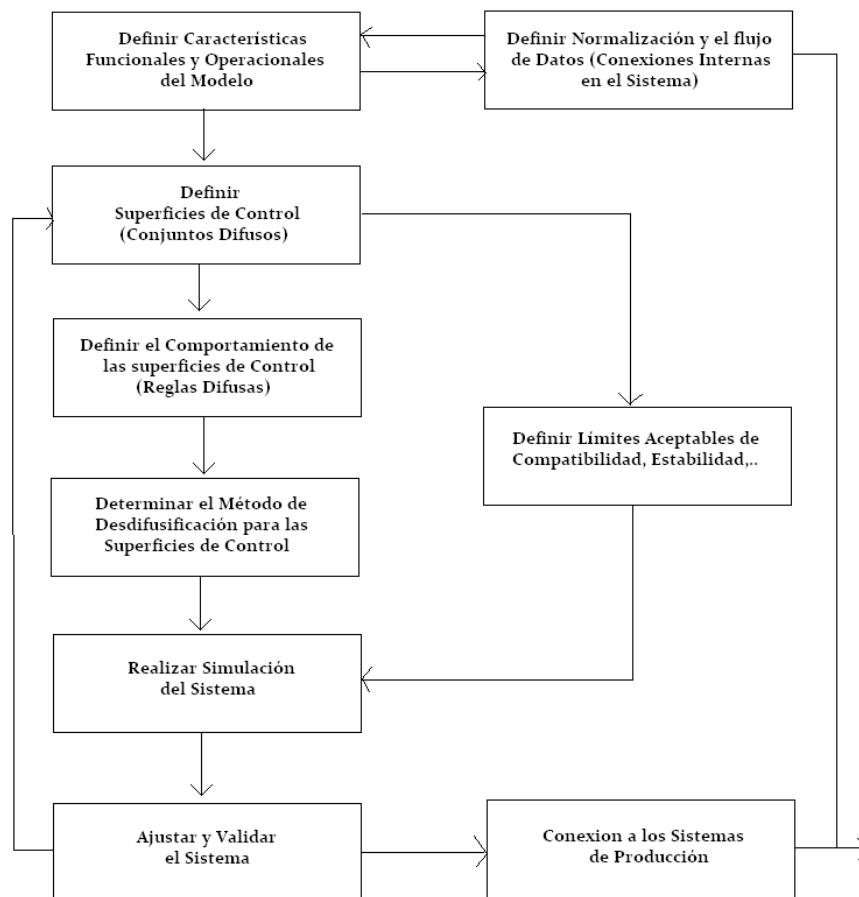


Figura 2.1: Ciclo de Desarrollo de Modelos Difusos [16].

La metodología pretende formalizar un procedimiento en el cual el diseño conceptual sea hecho en papel y los pasos siguientes son un ciclo iterativo de modelado y simulación, implementación en una computadora usando herramientas de desarrollo de lógica difusa, y continuando hasta que el modelo se comporte como se desee [5].



### 2.1.2. Partes del modelo difuso

Dentro del diseño de un sistema podemos hacer referencia a las partes o secciones que constituyen el modelado de este tipo. La conversión de valores del mundo real al dominio difuso mediante el uso de funciones de membresía, es conocida como *difusificación* (*fuzzification*, en Inglés) de las variables de entrada al sistema de difuso. Después de efectuar la difusificación, es necesario tener una *base de conocimiento* (conjunto de información que nos permitirá darle “inteligencia” al sistema), para posteriormente determinar la máquina de inferencia o *proceso de inferencia* difuso que es la parte más importante de todo modelo difuso, ya que es la parte que efectuará todo el proceso en base a la información disponible. Luego de evaluar las *reglas difusas*, que relacionan las *variables difusas*, es generalmente necesario trasladar los valores resultantes a su mundo original, el real, debido a la necesidad de obtener valores reales obtenidos a partir de conjuntos difusos compuestos en el dominio de la variable de salida. A esto se le conoce como *desdifusificación* (*defuzzification*) [2].

Algunas de las consideraciones empíricas que deben seguirse para la conformación de los conjuntos difusos son [17]:

1. El número de conjuntos difusos asociados a una variable deberá estar en el rango entre 2 y 9; generalmente se usan valores impares con la finalidad de tener un conjunto de inflexión.
2. Deberá asegurarse un traslape entre los conjuntos difusos, lo que permitirá un desempeño uniforme y por lo tanto estable (esta es una característica de los controladores difusos). El porcentaje de traslape entre dos conjuntos vecinos tiene un rango del 10% al 50%, cuidando que la suma de los valores de membresía del traslape no sea mayor a la unidad.
3. La cantidad o densidad de conjuntos deberá ser mayor en tanto se acerque al punto en que el sistema opera óptimamente.

### 2.1.3. Difusificación (*fuzzification*)

La difusificación es la parte encargada de convertir las variables reales o determinísticas a variables difusas, asociando éstas a un valor de pertenencia del conjunto difuso. El

proceso consta de las siguientes etapas:

- Medir los valores de las variables de entrada.
- Hacer una adaptación de escalas desde estas variables de entrada y el universo de discurso.
- Asociar a la entrada un valor lingüístico que puede verse como la pertenencia a un conjunto difuso dado.

Para este proceso existen varios métodos pero el más usado es el de tipo *singleton*. Este consiste en trazar una línea vertical justo en el valor de entrada a difusificar. La intersección de esta línea con las que definen los valores de membresía de los distintos conjuntos difusos, será el valor de membresía de cada uno de los conjuntos.

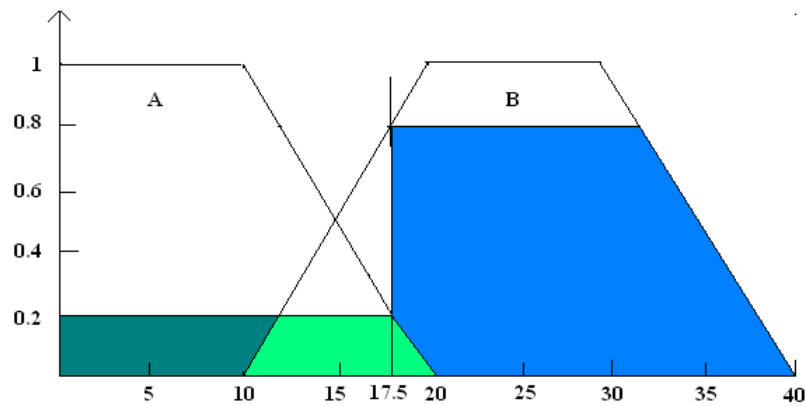


Figura 2.2: Difusificación tipo *singleton*.

Como ejemplo, en la Figura 2.2 se definen dos conjuntos difusos  $A$  y  $B$ . Si el valor a difusificar es 17.5 se puede apreciar que el valor pertenece a ambos conjuntos sólo que con diferencia en su grado de membresía. Así, tenemos que  $\mu_A(x) = 0.2$  y  $\mu_B(x) = 0.8$ . Una vez que todas las entradas hayan sido difusificadas estarán ya listas para ser usadas por la máquina de inferencia.

#### 2.1.4. Inferencia

A la inferencia difusa a veces se le llama razonamiento difuso o razonamiento aproximado. Se utiliza en una regla difusa para determinar el resultado de acuerdo a la información de entrada. Las reglas difusas representan la estrategia de conocimiento de modelado que es necesaria para calcular el resultado para las variables de salida en la regla resultante.

El proceso de inferencia es aquél que determina la salida más adecuada del sistema a partir de dos implicaciones, por un lado los datos de entrada y por otro la base de conocimiento [8].

#### 2.1.5. Desdifusificador

La desdifusificación es la parte encargada de transformar los conjuntos difusos y los valores de membresía que entrega como resultado la máquina difusa, en un valor real o concreto para fines prácticos e ingenieriles. A partir de los consecuentes de las reglas que se hayan activado ( $\mu \neq 0$ ), es necesario obtener una única acción de control, combinando el resultado propuesto por cada una de ellas. Existen varios métodos de desdifusificación, y cada uno es elegido de acuerdo al diseñador.

**Centro de área** El más usual es el de centro de área. En él, un área compuesta se forma por los niveles de activación de las diferentes reglas. La base de reglas nos da como respuesta las etiquetas lingüísticas con un cierto grado de pertenencia para cada uno de los conjuntos difusos. Se puede observar el área formada al graficar el grado de pertenencia de cada conjunto como una región sombreada, formando así un polígono irregular como se muestra en la Figura 2.3. Luego, la salida real será la coordenada del centro de área en el eje horizontal de la variable lingüística, como se muestra en la Figura 2.4.

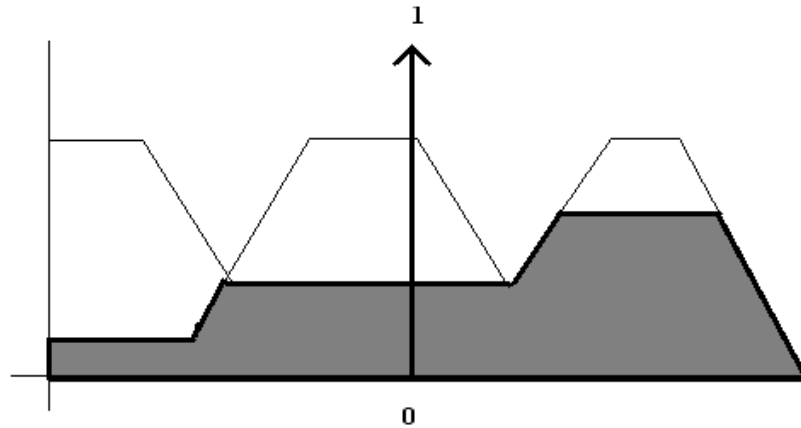


Figura 2.3: Área formada por las membresías de los conjuntos.

La definición matemática de este método es como sigue:

$$\bar{y} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(y)y d(y)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mu(y)d(y)} \quad (2.1)$$

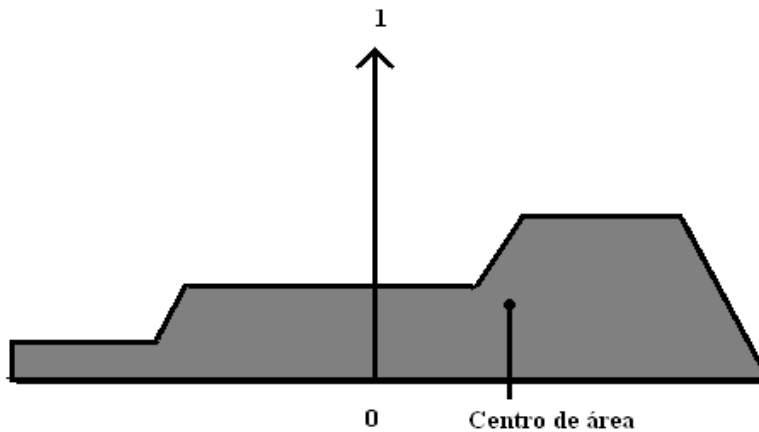


Figura 2.4: Desdifusificación por centro de área.

Como se deduce de la Ecuación 2.1, este procedimiento integra el *perfil* de las reglas para obtener el momento y luego lo divide entre el área. Existe una variante de este método, denominada centro de las sumas, la cual está definida por la ecuación

$$y = \frac{\sum_{l=1}^M y^{-l}(\mu_{B^l}(y^{-l}))}{\sum_{l=1}^M (\mu_{B^l}(y^{-l}))} \quad (2.2)$$

donde  $y^{-l}$  es el centro del conjunto  $G^l$ , que es el punto en  $V$  en el cual  $\mu_{G^l}(y)$  logra su máximo valor. En este procedimiento se calcula el momento y el área para cada regla por separado, en lugar del perfil, y luego se realiza una sumatoria de estos valores.

## 2.2. Modelo de Takagi y Sugeno

### 2.2.1. Introducción

Ha habido un gran número de estudios sobre el control difuso donde los consecuentes difusos de las reglas se utilizan para efectuar dicho proceso de control. La mayoría de los consecuentes utilizan variables con una función de pertenencia difusa unimodal debido a que son lingüísticamente comprensibles y debido a esto se les denomina variables lingüísticas. Sin embargo, para efectuar el control difuso que normalmente suele ser multimodal se requieren múltiples variables, lo cual resulta complicado con este tipo de control o sistema. Normalmente se utilizan 5 conjuntos difusos en cada variable haciendo de esto un número grande de reglas. Takagi y Sugeno proponen una forma de reducir el número de reglas [12].

De manera general, la construcción de modelos de datos de entrada-salida se distinguen por dos cosas: una herramienta matemática que nos represente nuestro sistema y el otro es un método de identificación. Una herramienta matemática en sí, debe tener simplicidad y generalidad. La regla difusa utilizada es simple. Basada en una partición difusa del espacio de entrada. En cada subespacio difuso se forma una relación lineal de entrada-salida. La salida de la inferencia es la suma de los valores obtenidos de reglas aplicadas a las entradas. Como bien se sabe, la identificación se divide en la identificación de la estructura y la identificación de los parámetros.

La mayoría de los controladores difusos se han diseñado en base a la experiencia de un operador humano y/o conocimientos ingenieriles. Sin embargo, en ocasiones las variables

lingüísticas no son útiles para resolver algún problema. Para este caso, es muy útil crear el modelo a partir de datos numéricos.

El artículo *Fuzzy Identificación of Systems and Its Applications to Modeling and Control* [12] realizado por Takagi y Sugeno, contiene la información fundamental sobre el método utilizado en este trabajo y todo el artículo será explicado en el resto de este capítulo.

### 2.2.2. Reglas difusas y algoritmo de inferencia

En el modelado propuesto por Takagi y Sugeno, las funciones de membresía se denotan como conjuntos difusos  $A$ , como  $A(x)$ ,  $x \in X$ . Todos los conjuntos difusos están asociados con una función de membresía triángulo rectangular. Así, una función de membresía se caracteriza por dos parámetros dando como mayor grado 1 y 0 en menor grado. El valor correcto de una proposición “ $x$  es  $A$  y  $y$  es  $B$ ” es expresado por

$$|x \text{ es } A \text{ y } y \text{ es } B| = A(x) \wedge B(y)$$

#### Formato de las reglas

Takagi y Sugeno sugieren que una regla difusa  $R$  tenga un formato

$$R : \text{ Si } f(x_1 \text{ es } A_1, \dots, x_k \text{ es } A_k) \text{ entonces } y = g(x_1, \dots, x_k) \quad (2.3)$$

donde

- $y$  Variable de salida ubicada en los consecuentes la cual es inferida.
- $x_1 - x_k$  Variables de entrada incluida en las premisas, las cuales intervienen en los consecuentes.
- $A_1 - A_k$  Conjuntos Difusos con función de membresía lineal, representando un subespacio difuso en el cual la regla  $R$  puede ser aplicada a la inferencia.
- $f$  Función de entrada ubicada en la premisa
- $g$  Función de salida ubicada en los consecuentes

*Ejemplo 1:*

$$R : \text{ Si } x_1 \text{ es pequeño y } x_2 \text{ es grande entonces } y = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

En esta regla tenemos que  $x_1$  es pequeño y  $x_2$  es grande por lo que la salida  $y$  debería ser igual a la suma de las entradas  $x_1$  y  $x_2$  más el doble de  $x_3$ . El método sólo usa la conexión “y” en la premisa, formando una función lineal en el consecuente [12]. Entonces, una implicación es escrita

$$R : \text{Si } x_1 \text{ es } A_1 \text{ y...y } x_k \text{ es } A_k \text{ entonces } y = p_0 + p_1x_1 + \dots + p_kx_k \quad (2.4)$$

### Algoritmo de inferencia

Suponemos que tenemos  $R^i (i = 1, \dots, n)$  con su debido formato. Cuando nos dan

$$(x_1 = x_1^0, \dots, x_k = x_k^0)$$

donde  $x_1^0 - x_k^0$  son singletons, el valor de  $y$  se infiere de la siguiente forma.

1) Para cada regla  $R^i$ , es calculada una  $y^i$  por una función  $g^i$  en el consecuente.

$$\begin{aligned} y^i &= g^i(x_1^0, \dots, x_k^0) \\ &= p_0^i + p_1^i x_1^0 + \dots + p_k^i x_k^0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

2) El valor correcto de  $y = y^i$  es calculado por la ecuación

$$\begin{aligned} |y = y^i| &= |x_1^0 \text{ es } A_1^i \text{ y } \dots \text{ y } x_k^0 \text{ es } A_k^i| \wedge |R^i| \\ &= (A_1^i(x_1^0) \wedge \dots \wedge A_k^i(x_k^0)) \wedge |R^i| \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $|*|$  es el verdadero valor de la proposición  $*$  y  $\wedge$  es indicado para el operador *min*, y  $|x^0 \text{ is } A| = A(x^0)$ , es decir, el grado de membresía de  $x^0$  en  $A$ .

Por simplicidad asumimos

$$|R^i| = 1 \quad (2.7)$$

el valor correcto que se obtiene de los consecuentes es

$$|y = y^i| = A_1^i(x_1^0) \wedge \dots \wedge A_k^i(x_k^0) \quad (2.8)$$

3) La salida final inferida por las  $n$  reglas dadas se obtiene como un promedio de todas las  $y^i$  con los pesos  $|y = y^i|$ :

$$y = \frac{\sum |y = y^i| \times y^i}{\sum |y = y^i|} \quad (2.9)$$

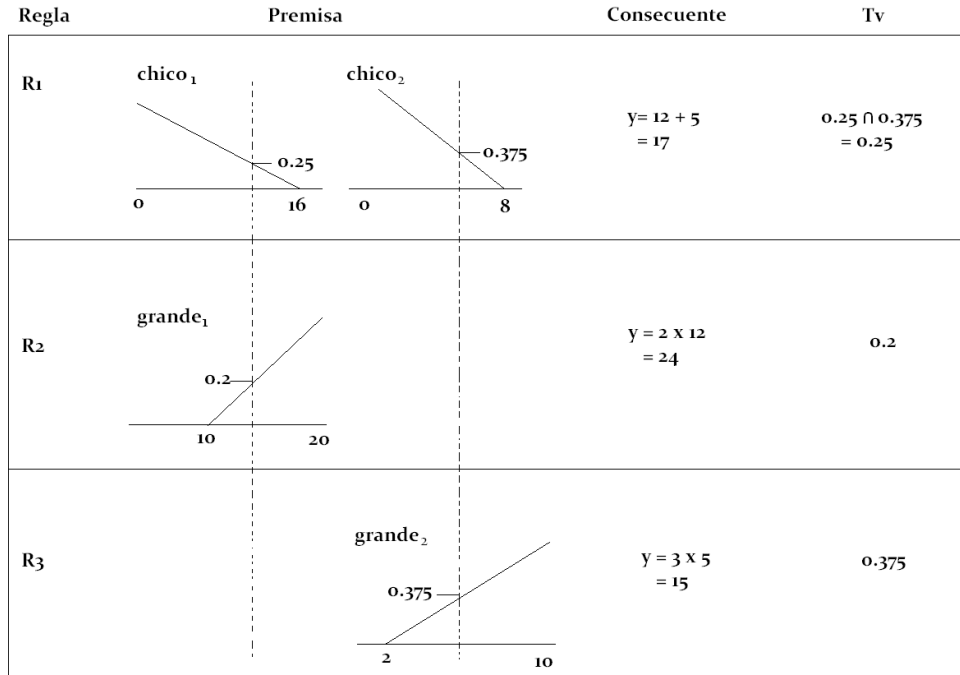


Figura 2.5: Premisas y consecuentes del Ejemplo 2.

*Ejemplo 2*

Supongamos que tenemos las siguientes tres implicaciones [12]:

$R^1$ : Si  $x_1$  es **chico**<sub>1</sub> y  $x_2$  es **chico**<sub>2</sub> entonces  $y = x_1 + x_2$

$R^2$ : Si  $x_1$  es **grande**<sub>1</sub> entonces  $y = 2x_1$

$R^3$ : Si  $x_2$  es **grande**<sub>2</sub> entonces  $y = 3x_2$

La Figura 2.5 nos muestra nuestros conjuntos representando las premisas y consecuentes del proceso de inferencia de cada regla del Ejemplo 2, teniendo como entradas  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 5$ . Las premisas muestran en la figura las funciones de membresía de los conjuntos difusos “chico” y “grande”. Los consecuentes muestran el valor de  $y^i$  calculado por la función  $g^i$  de cada consecuente y “Tv” muestra el valor correcto de  $|y = y_i|$ . Por ejemplo tenemos



$$\begin{aligned}
 |y = y^1| &= |x_1^0 = \text{chico}_1| \wedge |x_2^0 = \text{chico}_2| \\
 &= \text{chico}_1(x_1^0) \wedge \text{chico}_2(x_2^0) \\
 &= 0.25
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

El valor inferido por las reglas se obtiene, basándonos en la Figura 2.5., como

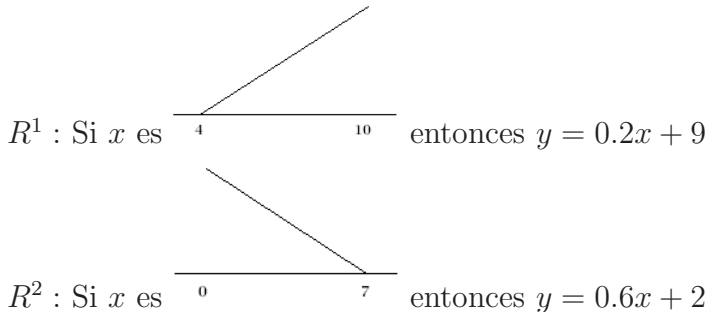
$$y = \frac{0.25 \times 17 + 0.2 \times 24 + 0.375 \times 15}{0.25 + 0.2 + 0.375} \simeq 17.8 \tag{2.11}$$

### Propiedades de la inferencia

A continuación se presentan unos ejemplos que muestran el funcionamiento del algoritmo de inferencia bajo análisis.

#### Ejemplo 3

Suponemos que tenemos 2 reglas.



En la Figura 2.6 se muestra la relación de  $x$  y  $y$  que está marcada por “+”. Las líneas rectas representan las reglas. Las ecuaciones de los consecuentes se pueden interpretar como una forma de interpretar el subespacio difuso definido en la premisa.

Podemos comparar los métodos de aproximación, ya que normalmente se hace de manera directa. En un caso así se ocuparía una tercera recta que represente el intervalo de unión entre  $R^1$  y  $R^2$ , sin embargo, la manera planteada sugiere reducir este número de implicaciones abarcando un rango más amplio en las premisas. De esta manera, podemos asignar etiquetas lingüísticas a los espacios de entrada como “chico” y “grande”.

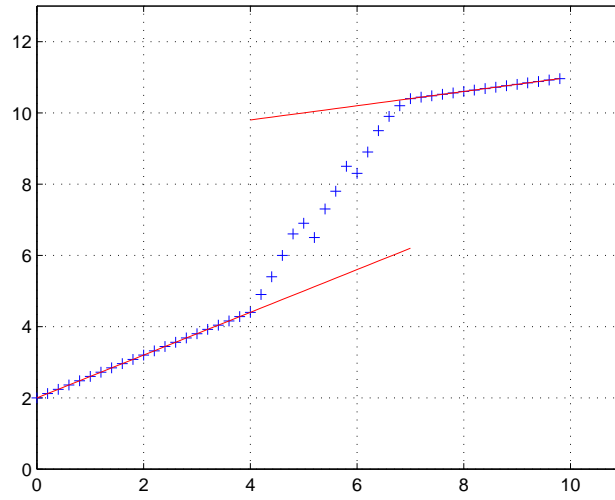


Figura 2.6: Resultado de la inferencia difusa.

#### Ejemplo 4

La Figura 2.7 muestra la relación de entrada y salida expresada por las reglas del Ejemplo 2. En este caso las premisas están en dos dimensiones. En la figura la superficie curva muestra una relación de entrada y salida altamente no lineal, cuya forma refleja el predominio de cada una de las reglas en su región aplicada y también el conflicto de las reglas en el área traslapada [12].

### 2.2.3. Algoritmo de Identificación

Se ha mencionado que el modelo difuso consiste de algún número de reglas con la forma

$$R : \text{Si } f(x_1 \text{ es } A_1, \dots, x_k \text{ es } A_k) \text{ entonces } y = g(x_1, \dots, x_k)$$

caracterizado por la conexión “y” y la ecuación lineal.

Dado un conjunto de datos de entrada-salida del sistema, tenemos que determinar tres elementos para poder realizar nuestra identificación, en base a nuestros datos.

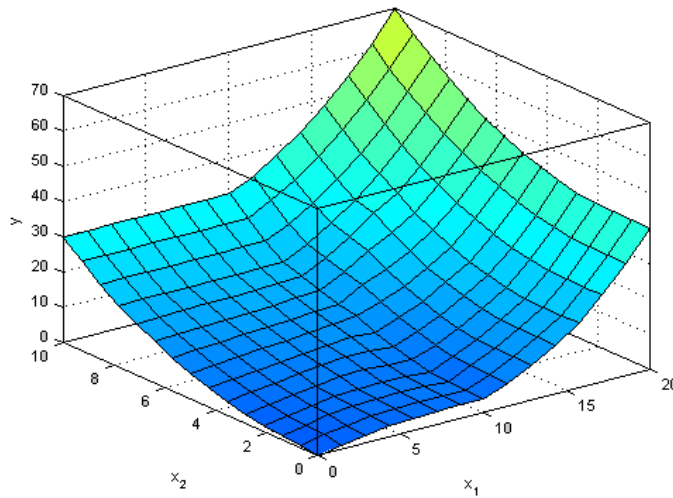


Figura 2.7: Resultado de la inferencia difusa en el Ejemplo 2.

- 1)  $x_1, \dots, x_k$  Variables que componen las reglas en las premisas
- 2)  $A_1, \dots, A_k$  Funciones de membresía del sistema en las premisas
- 3)  $p_0, \dots, p_k$  Coeficientes en los consecuentes

No necesariamente las variables tienen que aparecer en las premisas. Los elementos (1) y (2) están relacionados con la partición del espacio de las variables de entrada en algunos subespacios difusos. El (3) está relacionado con la descripción de los datos de entrada-salida de cada subespacio difuso. Se considera la relación de estos tres de manera jerárquica, o sea, del elemento (1) al (3). El algoritmo de identificación de las reglas está dividido en tres pasos que van relacionados con los tres elementos.

1) *Elección de las variables en las premisas.* Primeramente, una combinación de las premisas es elegida de entre las posibles variables de entrada que podemos tener. Posteriormente sigue encontrar los parámetros de las premisas y los consecuentes óptimos, al mismo tiempo que el cálculo del error de la salida del sistema. Teniendo esto, el objetivo es mejorar el modelo disminuyendo el índice de rendimiento por el error cuadrático medio.

2) *Identificación de las premisas.* Es aquí donde se buscan los parámetros de las

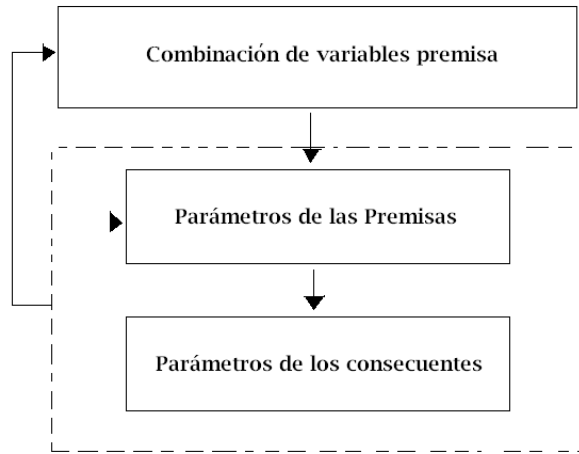


Figura 2.8: Esquema del algoritmo de identificación.

premisas óptimas para las variables ya elegidas en el paso (1). Una vez encontrados estos parámetros podemos obtener los parámetros consecuentes óptimos junto con el índice de rendimiento conforme se tenga (3). Este proceso para encontrar las premisas óptimas consiste en un problema de programación lineal.

3) *Identificación de los consecuentes.* Los parámetros consecuentes que dan un menor índice de rendimiento son encontrados por medio del método de mínimos cuadrados con las variables premisas dadas con el paso (1) y los parámetros del (2).

El esquema del algoritmo se muestra en la Figura 2.8.

#### 2.2.4. Identificación de los parámetros en los consecuentes

La finalidad es encontrar parámetros óptimos en los consecuentes a fin de minimizar el índice de rendimiento lo más posible. El índice de rendimiento se puede definir como el error cuadrático medio del sistema, dado entre la salida del modelo y el sistema original.

Un sistema puede ser representado por las siguientes reglas:

$$\begin{aligned}
 R^1 & \text{ Si } x_1 \text{ es } A_1^1, \dots, \text{ y } x_k \text{ es } A_k^1 \text{ entonces } y = p_0^1 + p_1^1 \cdot x_1 + \dots + p_k^1 \cdot x_k \\
 R^n & \text{ Si } x_1 \text{ es } A_1^n, \dots, \text{ y } x_k \text{ es } A_k^n \text{ entonces } y = p_0^n + p_1^n \cdot x_1 + \dots + p_k^n \cdot x_k
 \end{aligned}$$

donde la salida  $y$  de las entradas  $(x_1, \dots, x_k)$  es obtenida como

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge A_n^i(x_n)) \cdot (p_0^i + p_1^i \cdot x_1 + \dots + p_k^i \cdot x_k)}{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge A_n^i(x_n))} \quad (2.12)$$

donde  $\beta_i$  es

$$\beta_i = \frac{A_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge A_n^i(x_n)}{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge A_n^i(x_n))} \quad (2.13)$$

entonces

$$\begin{aligned} y &= \sum_i^n \beta_i (p_0^i + p_1^i \cdot x_1 + \dots + p_k^i \cdot x_k) \\ &= \sum_{i=1}^n (p_0^i \cdot \beta_i + p_1^i \cdot x_1 \cdot \beta_i + \dots + p_k^i \cdot x_k \cdot \beta_i) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Cuando un conjunto de datos de entrada-salida

$x_{ij}, x_{2j}, \dots, x_{kj} \rightarrow y_j$  ( $j = 1 \dots m$ ) son dados, podemos obtener los parámetros de los consecuentes  $p_0^i, p_1^i, \dots, p_k^i$  ( $i = 1 \dots n$ ) por el método de mínimos cuadrados usando la Ecuación 2.14.

$$X = \begin{bmatrix} \beta_{11}, \dots, \beta_{n1} & x_{11} \cdot \beta_{11}, \dots, x_{11} \cdot \beta_{n1} & \dots & x_{k1} \cdot \beta_{11}, \dots, x_{k1} \cdot \beta_{n1} \\ \beta_{12}, \dots, \beta_{n2} & x_{12} \cdot \beta_{12}, \dots, x_{12} \cdot \beta_{n2} & \dots & x_{k2} \cdot \beta_{12}, \dots, x_{k2} \cdot \beta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{1m}, \dots, \beta_{nm} & x_{1m} \cdot \beta_{1m}, \dots, x_{1m} \cdot \beta_{nm} & \dots & x_{km} \cdot \beta_{1m}, \dots, x_{km} \cdot \beta_{nm} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

donde

$$\beta_{ij} = \frac{A_1^i(x_{1j}) \wedge \dots \wedge A_k^i(x_{kj})}{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_{1j}) \wedge \dots \wedge A_k^i(x_{kj}))} \quad (2.16)$$

$$Y = [y_1 \cdots , y_m]^T \quad (2.17)$$

$$P = [p_0^1, \cdots , p_0^n, p_1^1, \cdots , p_0^n, \cdots , p_k^1, \cdots , p_k^n]^T \quad (2.18)$$

donde los parámetros del vector  $P$  se calcula mediante

$$P = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (2.19)$$

Cabe señalar que el método que proponen Takagi y Sugeno es coherente con el método de razonamiento. En otras palabras, este método permite la identificación de los mismos parámetros que los del sistema original, si se cuenta con suficientes datos de salida sin ruido para su identificación.

### 2.2.5. Identificación de los parámetros en las premisas

Aquí se plantea cómo particionar nuestras variables de entrada, es decir, la construcción de nuestros conjuntos difusos mediante la obtención de los parámetros que nos indicarán los límites de los mismos.

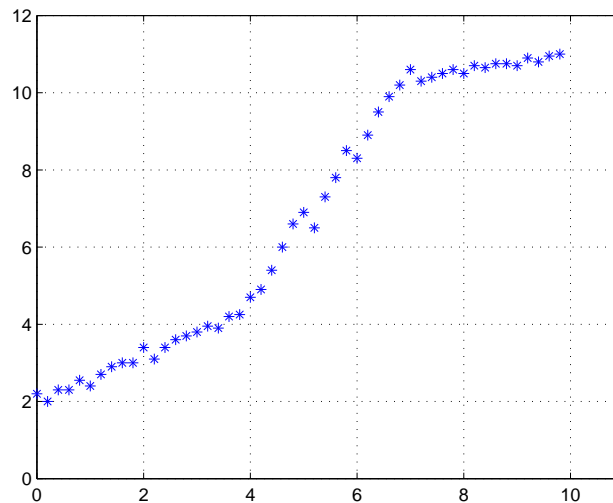


Figura 2.9: Datos de entrada-salida.

Por ejemplo, en la Figura 2.9 podemos observar que las características de entrada-salida cambian conforme  $x$  va incrementándose. Así, dividiendo el espacio en dos sub-espacios difusos donde  $x$  puede ser “chico” o “grande”, obtenemos un modelo con las siguientes dos reglas:

$$\text{si } x \text{ es } \mathbf{chico} \text{ entonces } y = a_1x + b_1$$

$$\text{si } x \text{ es } \mathbf{grande} \text{ entonces } y = a_2x + b_2$$

Posteriormente calculamos las funciones de membresía de “chico” y “grande”, así como los parámetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $a_2$  y  $b_2$  en los consecuentes.

Puede observarse fácilmente que para dividir los espacios en algunos subespacios difusos es necesario determinar la función de membresía de los conjuntos difusos en las premisas. El problema es encontrar los parámetros óptimos de las funciones de membresía para poder reducir al mínimo el índice de rendimiento.

A esto se le llama “identificación de los parámetros en las premisas”. El algoritmo es descrito a continuación.

1) Suponiendo los parámetros de los conjuntos difusos, obtenemos los parámetros consecuentes óptimos que minimizan el índice de rendimiento.

2) El problema de encontrar los parámetros óptimos de las premisas minimizando el índice de rendimiento es reducido a un problema de programación lineal. En el trabajo realizado por Takagi y Sugeno se utiliza el método complex para la minimización. Cada conjunto difuso en las premisas es determinado por dos parámetros que nos dan como mayor grado 1 y en menor grado 0, suponiendo que un conjunto difuso deber tener una función de membresía lineal.

### *Ejemplo 5*

Este ejemplo muestra la identificación usando los datos de entrada-salida generados por un sistema con ruido. La desviación estándar es del 5% de las salidas. Cabe señalar que se pueden identificar los mismos parámetros de las premisas como el sistema original si el ruido no existiera.

Suponiendo el sistema original con las siguientes dos reglas:

$$R^1 : \text{Si } x \text{ es } \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline 0 \quad 7 \end{array} \text{ entonces } y = 0.6x + 2$$

$$R^2 : \text{Si } x \text{ es } \begin{array}{c} \diagup \\ \hline 4 \quad 10 \end{array} \text{ entonces } y = 0.2x + 9$$

Las funciones en los consecuentes de las reglas y el ruido de los datos de entrada-salida se muestran en la Figura 2.10.

Las reglas de los parámetros identificados son las siguientes.

$$R^1 : \text{Si } x \text{ es } \begin{array}{c} \diagdown \\ \hline 0 \quad 6.6 \end{array} \text{ entonces } y = 0.59x + 2.2$$

$$R^2 : \text{Si } x \text{ es } \begin{array}{c} \diagup \\ \hline 4 \quad 10 \end{array} \text{ entonces } y = 0.12x + 9.5$$

### 2.2.6. Elección de las variables en las premisas

En esta sección se sugiere un algoritmo para elegir las posibles variables de entrada existentes en las premisas. Como se ha mencionado anteriormente, no todas las variables de los consecuentes aparecen en las premisas. Existen dos problemas relacionados con el algoritmo. El primero de ellos es la elección de variables: elegir una variable en las premisas implica una división del espacio. El otro es el número de divisiones. En general no hay un enfoque teórico disponible, por lo cual el algoritmo de Takagi-Sugeno sugiere un método de búsqueda heurística descrita por los siguientes pasos.



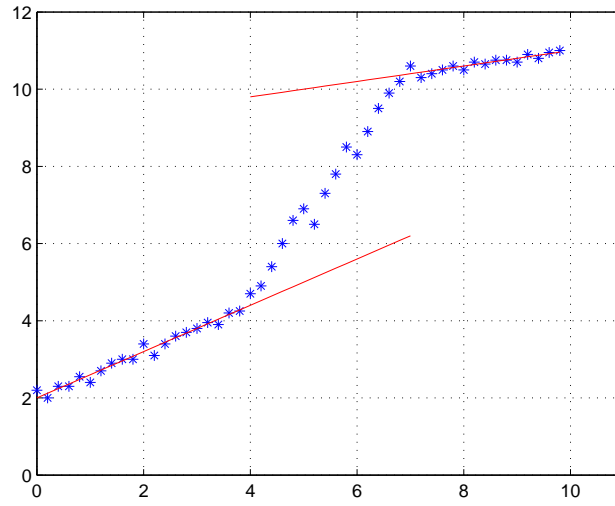


Figura 2.10: Consecuentes y datos con ruido.

Suponiendo que se construye un modelo difuso de  $k$ -entradas  $x_1, \dots, x_k$  y una sola salida.

**Paso 1** El rango de  $x_1$  es dividido en dos subespacios “grande” y “chico”, y los rangos de otras variables  $x_2, \dots, x_k$  se quedan intactos, lo que significa que sólo  $x_1$  aparece en la premisa de la regla. Este modelo consta de las siguientes dos reglas

si  $x_1$  es **grande**<sub>1</sub>      entonces...  
 si  $x_1$  es **chico**<sub>1</sub>      entonces...

Este es llamado modelo 1-1. De la misma forma, un modelo en el que el rango de  $x_2$  por ejemplo, es dividido y los rangos de las demás variables  $x_1, x_3, \dots, x_k$  se mantienen igual, se nombraría modelo 1-2. En este modelo tenemos  $k$ -modelos, donde cada uno está compuesto por dos reglas. En general, el modelo 1- $i$  queda de la siguiente forma

si  $x_i$  es **grande** <sub>$i$</sub>       entonces...  
 si  $x_i$  es **chico** <sub>$i$</sub>       entonces...

**Paso 2** Para cada modelo, los parámetros de los consecuentes y las premisas óptimos son encontrados por el algoritmo descrito en la Sección 2.2.2. El modelo óptimo con menor índice de rendimiento es elegido de los  $k$ -modelos. Esto es llamado un estado estable.

**Paso 3** Partiendo de un estado estable al paso 1, donde únicamente la variable  $x_i$  aparece en las premisas, tomando todas las combinaciones de  $x_i - x_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) y dividido el rango en dos subespacios difusos. Para la combinación  $x_i - x_j$ , el rango de  $x_i$  es dividido en 4 subespacios, por ejemplo, “grande”, “medio grande”, “medio chico” y “chico”. Así pues, tenemos  $k$ -modelos, cada uno es nombrado modelo 2- $j$ . Cada modelo consiste de  $2 \times 2$  reglas. Después encontramos un nuevo modelo con el menor índice de rendimiento justo como en el paso 2, que también es llamado estado estable en este paso.

**Paso 4** Repetir el paso 3 de manera similar, poniendo otra variable en la premisa.

**Paso 5** La búsqueda es detenida si alguno de los siguientes criterios se satisface.

- 1) El índice de rendimiento de un estado estable resulta menor que alguno propuesto inicialmente como óptimo.
- 2) El número de las consecuencias de un estado estable excede el número predefinido.

La elección de las variables en las premisas sigue un comportamiento como muestra la Figura 2.11.

En el capítulo se presenta el uso de esta metodología para la construcción de modelos difusos aproximando funciones. La identificación se realiza a partir de datos con ruido, siendo estos obtenidos de funciones mas una desviación estándar. Takagi y Sugeno nos dicen que el método permite la identificación de los mismos parámetros que los del sistema original, si se cuenta con suficientes datos de salida sin ruido.

En el siguiente capítulo se explicará la metodología empleada para el modelado propuesto.

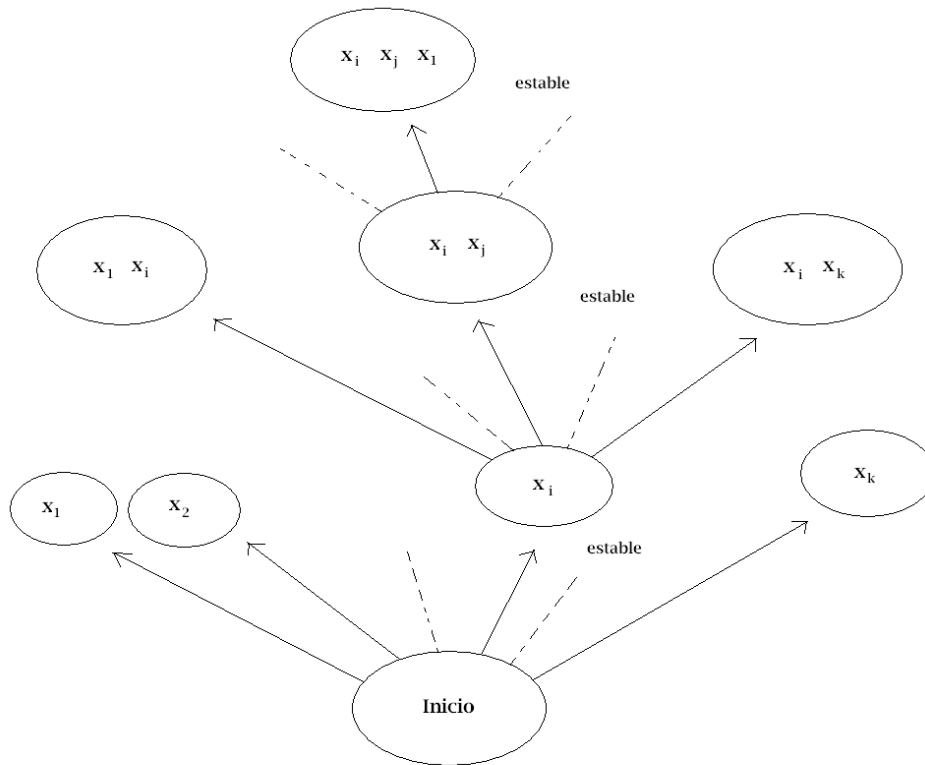


Figura 2.11: Elección de variables en las premisas.

# Metodología de modelado para la identificación de sistemas

---

En el presente capítulo se explica el modelado efectuado para la identificación de sistemas, el cual se basa en el modelado de Takagi y Sugeno para identificación de consecuentes, sin embargo, se hacen consideraciones particulares en diferentes aspectos como lo son la identificación de las premisas y la evaluación de nuestro modelo, de los cuales se hará mención a detalle en el capítulo.

El establecimiento de un modelo entrada-salida de un proceso es un problema fundamental en la ingeniería, por lo que muchos métodos determinísticos y estocásticos han sido propuestos para determinar modelos matemáticos aceptables. Sin embargo, en el modelado de procesos complicados o mal definidos, los modelos matemáticos precisos pueden fallar en cuanto a la producción de resultados satisfactorios. En tales casos, un modelo difuso puede ser empleado para tratar con esa incertidumbre del sistema; esta es una razón por la que la identificación de modelos difusos ha llamado la atención en los últimos años [9].

La síntesis del modelo difuso consiste en la identificación de los parámetros en las premisas para la construcción de la estructura, la identificación de los parámetros en los consecuentes para la construcción de reglas y en la ponderación de las mismas para la generación de la salida.

En este estudio se presenta el modelado para la identificación y síntesis de sistemas difusos a partir de evidencia numérica. En nuestro caso, de evidencia numérica derivada de funciones matemáticas.

Primeramente, se partirá de la adquisición de evidencia numérica, la cual se obtiene a partir de funciones matemáticas de prueba. Teniendo esta información, la identificación de la estructura partirá de la construcción de los conjuntos difusos en cada una de las variables de entrada. Esto es, para cada entrada se obtendrá la cantidad indicada de conjuntos difusos; para esto, es necesario identificar los parámetros de las premisas que permitirán la construcción de dichos conjuntos.

Tomando en cuenta que se tiene cada variable de entrada dividida en varios conjuntos difusos, se efectúa la identificación de los parámetros de los consecuentes para cada una de las reglas, dando como resultado un conjunto de funciones con las cuales se hará un promedio ponderado para la obtención de la salida.

Se ha utilizado MATLAB<sup>®</sup> 7.8.0, el cual cuenta con un Toolbox de Fuzzy Logic en el cual al proporcionarle las premisas y los consecuentes, obtiene la salida de manera numérica y de manera gráfica.

En las secciones siguientes se describirá a detalle cada uno de los procesos implementados para conformar nuestro modelo y posteriormente se mostrarán y analizarán resultados en capítulos posteriores.

## **3.1. Identificación de la estructura**

### **3.1.1. Adquisición de la evidencia numérica**

Para nuestro trabajo la evidencia numérica son datos obtenidos utilizando funciones matemáticas. Es decir, que para cada valor en un codominio le corresponderá uno en un contradominio en base a la función establecida.

**Funciones Matemáticas**

Una función matemática  $f$ , es una relación entre un conjunto de datos dado un dominio  $X$  y un contradominio  $Y$  de forma que a cada elemento del dominio  $X$  le corresponde un único elemento del contradominio  $Y$ .

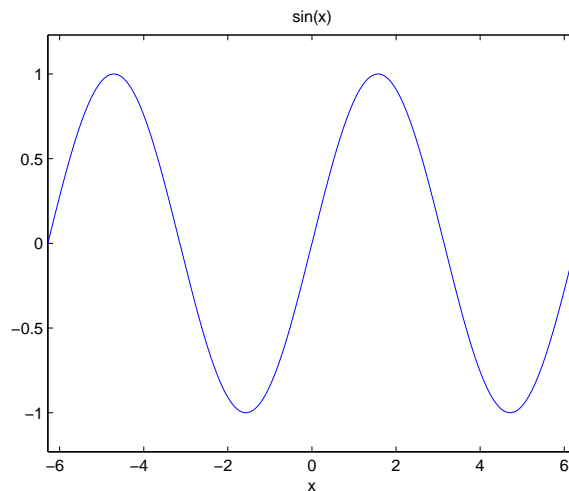
$$f : X \rightarrow Y$$

Una función puede considerarse particularmente como una relación o de correspondencia matemática. Se denota como  $f(x) = y$  a cada relación que existe entre un elemento  $x \in X$  con uno y solo uno de  $y \in Y$ , en el lugar de  $(x, y) \in f$  [10].

Una función  $f$  es continua en  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

La evidencia numérica obtenida utilizando funciones matemáticas y que se emplea en este estudio, corresponde a los valores relacionados con diferentes funciones propuestas, tanto de una variable, dos variables y tres variables. La Figura 3.1 muestra un ejemplo, considerando una variable, y la Figura 3.2 nos muestra otro ejemplo, para dos variables.



**Figura 3.1:** Función  $f(x) = \sin(x)$ .

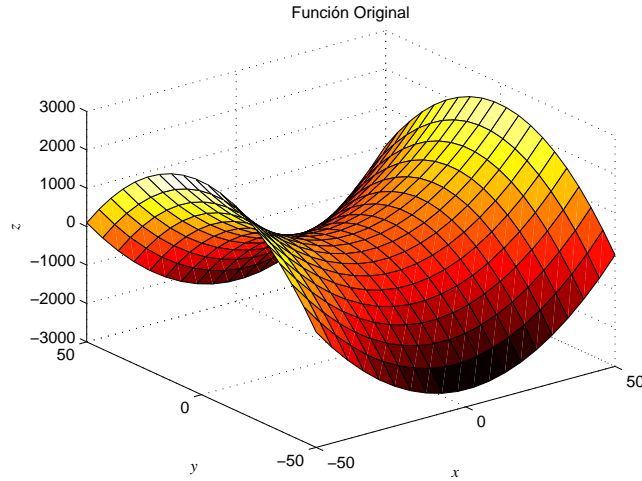


Figura 3.2: Función  $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$ .

### Discretización de las funciones

Para la síntesis de un modelo, es necesario tener un número finito de datos con los cuales se pueda trabajar. Es necesario emplear la información de cada función en forma de muestras, para ello, se discretiza cada una de las funciones utilizadas, es decir, se establecen los límites del dominio de la función y el intervalo entre muestra y muestra, donde cada muestra será evaluada por la función. La Figura 3.3 nos presenta la función del seno, ya discretizada. De manera análoga, la Figura 3.4 que nos muestra la función  $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$  en su forma discreta.

### Ruido en la evidencia

Un punto importante para el trabajo es la identificación y aproximación de las funciones tratadas, razón por la cual es importante que dicha función contenga ruido, lo cual nos evidencia una mayor robustez en el modelo. Como ejemplo, la Figura 3.5 nos muestra la información a utilizar para nuestro modelo en el caso de la función  $\sin(x)$ , la cual es evidencia ruidosa, y la Figura 3.6 es el caso para dos variables con ruido, siendo visualizada de forma continua con la finalidad de apreciar mejor el ruido en la función.

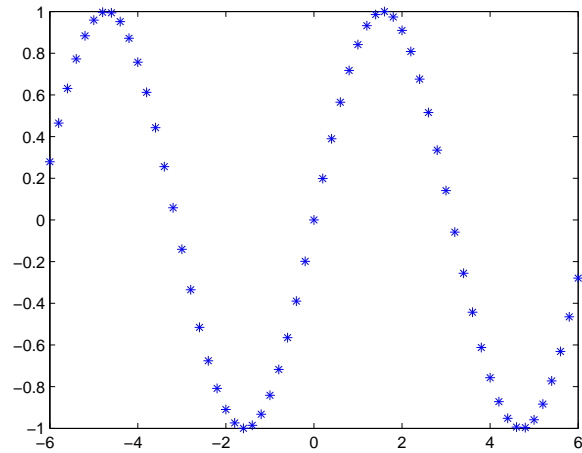


Figura 3.3: Función  $f(x) = \sin(x)$  discretizada.

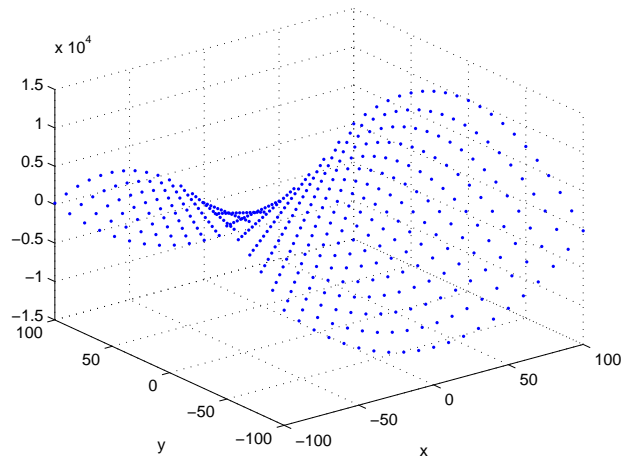


Figura 3.4: Función  $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$  de forma discreta.

## 3.2. Identificación de los parámetros en las premisas

La identificación de las premisas es la etapa inicial del modelado considerado, para esta identificación es importante conocer nuestra evidencia numérica. Son utilizadas diferentes formas de identificación de premisas, de lo cual se comenta a continuación.



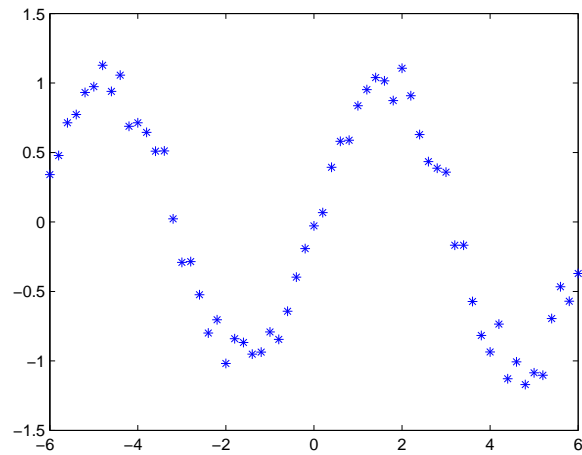


Figura 3.5: Función  $f(x) = \sin(x)$  ruidosa y de forma discreta.

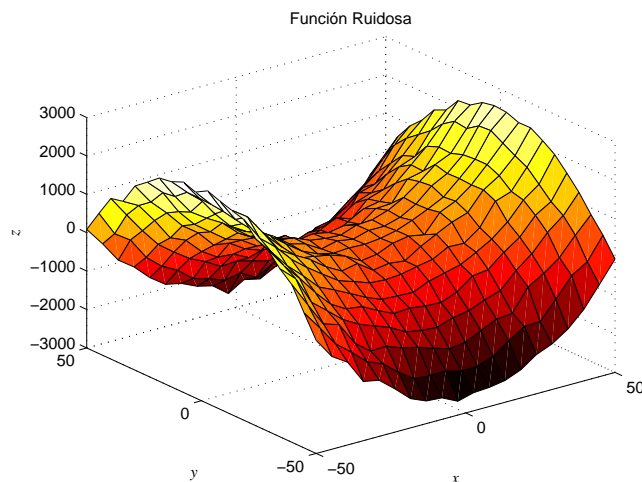


Figura 3.6: Función  $f(x, y) = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2$  ruidosa.

### 3.2.1. Creación de los conjuntos difusos

Como bien establece la lógica difusa, uno o más valores pueden pertenecer a varios conjuntos difusos y tener un grado de pertenencia para cada uno de ellos. Takagi y Sugeno, en su trabajo, tratan conjuntos difusos que tienen una función de membresía lineal. Es decir, la función que describe cada uno de los conjuntos es la función de una línea recta, cuya pendiente  $m$  depende de los parámetros calculados en esta identificación.

Como se explicó en el Capítulo 1, existen distintos tipos de conjuntos difusos común-

mente utilizados los triangulares y los trapezoidales. Considerando que los conjuntos tratados en nuestra metodología son un segmento de recta, se puede decir que son equivalentes a un conjunto triángulo rectangular. La Figura 3.7 nos muestra la división de conjuntos difusos lineales o con función de membresía de un triángulo rectángulo y la Figura 3.8 nos muestra los conjuntos del tipo triángulo acutángulo.

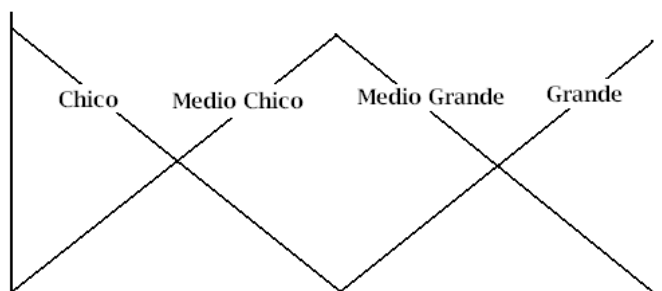


Figura 3.7: Conjuntos difusos con función lineal o función de triángulo rectángulo.



Figura 3.8: Conjuntos difusos con función de triángulo acutángulo.

### 3.2.2. Conjuntos igualmente distribuidos

El diseño de conjuntos difusos igualmente distribuidos es una forma sencilla de particionar el espacio de una variable. Para esto, se requiere saber el valor mínimo y el máximo en el dominio de la variable, para así poder dividir en el rango de un número determinado de conjuntos la diferencia absoluta de dichos valores. La Figura 3.9 muestra una distribución uniforme de los conjuntos difusos para una variable.

Utilizar esta distribución implica el no abarcar toda la información proporcionada de manera correcta, Takagi y Sugeno proponen el empleo del método complex de programación lineal. Nosotros utilizamos aproximaciones diferentes para la identificación de

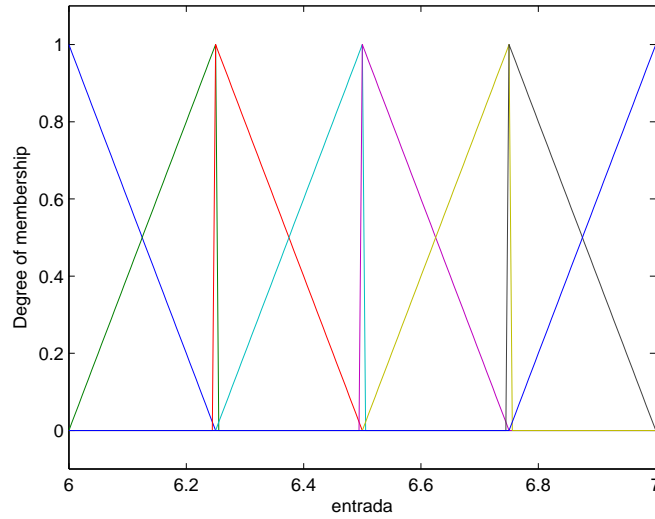


Figura 3.9: Identificación de las premisas igualmente distribuidas.

las premisas, siendo una de ellas un algoritmo basado en el fuzzy c-means.

### 3.2.3. Construcción de conjuntos por Fuzzy C-Means

Siendo este método utilizado únicamente en la identificación de premisas para el caso de una dimensión, de lo cual se hablará más adelante.

Fuzzy C-Means (FCM), es un método de agrupación que permite que una sección de datos pertenezca a dos o más grupos. Este método (desarrollado por Dunn en 1973 y mejorado por Bezdek en 1981)[1] se utiliza mucho en el reconocimiento de patrones. Se basa en la minimización de la siguiente función objetivo

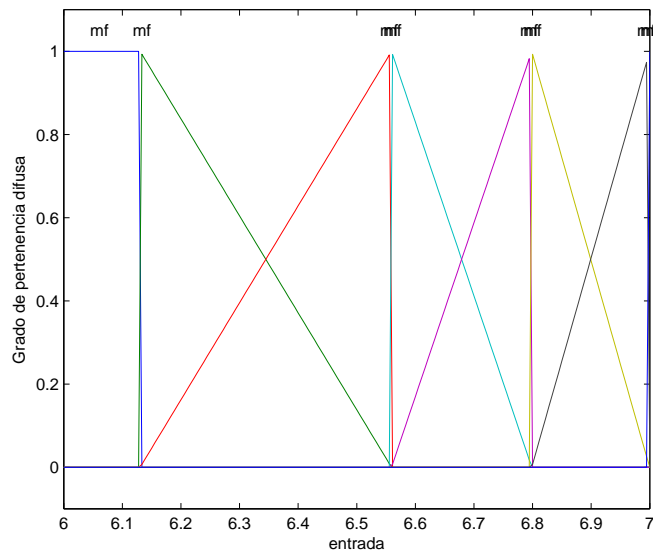
$$J_m(U, V) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^c \mu_{ij}^m |x_i - V_j|^2, \quad 1 \leq m < \infty$$

donde  $m$  es cualquier número real mayor que 1 denotando el grado de difusidad,  $c$  es el número de clases (particiones) en las que deseamos clasificar los datos,  $n$  es el número de datos,  $\mu_{ij}$  es el grado de membresía de  $X_i$  en el grupo  $j$ ,  $x_i$  es el  $i$ -ésimo de los datos medidos de  $d$ -dimensión,  $V_j$  es el centro de  $d$ -dimensión del grupo, y  $|*|$  es cualquier norma expresando la similitud entre los datos medidos y el centro.

El empleo de este algoritmo es empleado por la función  $[centro, U, fun_{obj}] = fcm(N, C)$ , donde  $centro$  es la matriz de los  $c$ -centros obtenidos,  $U$  es la matriz de partición difusa final,  $fun_{obj}$  valores de la función objetivo durante la iteración,  $N$  es el conjunto de datos a agrupar y  $C$  son el número de clusters.

La referencia [9] en la página 27, nos explica con más detalle el algoritmo FCM.

Sabiendo en qué consiste el método de Fuzzy C-means, podemos agrupar en  $c$ -números nuestro conjunto de datos, obteniendo así una mejor distribución de la información en los conjuntos, es decir, que podemos diseñar nuestros conjuntos de una forma óptima. La Figura 3.10 nos muestra el resultado de nuestros conjuntos con la identificación de las premisas por Fuzzy C-means.



**Figura 3.10:** Identificación de las premisas por Fuzzy C-Means.

### 3.3. Identificación de parámetros en los consecuentes

Para la identificación de los consecuentes se hace el proceso de la misma forma que expone Takagi y Sugeno. Teniendo identificadas nuestras premisas se procede a efectuar el cálculo de los diferentes parámetros  $\beta$ . Cabe mencionar que ésta es fundamental, ya que el cálculo de dichas  $\beta$  requiere de la difusificación del dato a evaluar. Revisemos de nuevo la Ecuación 2.16:

$$\beta_{ij} = \frac{A_{i1}(x_{1j}) \wedge \dots \wedge A_{ik}(x_{kj})}{\sum_{i=1}^n (A_{i1}(x_{1j}) \wedge \dots \wedge A_{ik}(x_{kj}))}$$

Como se analizó en el Capítulo 2, teniendo nuestros valores  $\beta$ s es fácil obtener nuestros parámetros  $p$  que son los coeficientes de nuestras ecuaciones en los consecuentes. La salida del modelo es obtenida por el promedio ponderado de las reglas obtenidas. La Ecuación 2.12 promedia las reglas obtenidas por el modelo para proporcionar la salida final, y se muestra nuevamente:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge A_n^i(x_n)) \cdot (p_0^i + p_1^i \cdot x_1 + \dots + p_k^i \cdot x_k)}{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_1) \wedge \dots \wedge A_n^i(x_n))}$$

Durante este capítulo se comentó sobre la metodología empleada en el modelo considerado. Partiendo de la obtención de evidencia numérica evaluando funciones matemáticas mas ruido, se hace la identificación para las premisas y los consecuentes. Cada una de las identificaciones explicadas, constituyen una parte importante de nuestro modelo. La construcción de los conjuntos difusos, se realiza de dos formas distintas; distribución uniforme y por fuzzy c-means. Sin embargo, la identificación de los consecuentes tiene una única forma de efectuarse, y es por medio de lo propuesto por Takagi y Sugeno.

En el siguiente capítulo, se mostrarán las pruebas y los resultados obtenidos con el modelo difuso tratado.

# Pruebas y resultados para la identificación de funciones de una variable

---

La identificación y aproximación de funciones es la aplicación en la cual se basa el trabajo. Aproximar una función es una forma para verificar el funcionamiento del modelo tratado en este trabajo.

En este capítulo analizamos resultados basados en la aproximación de funciones de una variable, esto es, gráficas en una dimensión.

## 4.1. Identificación y Aproximación del modelo para una variable

La identificación del modelo para una variable empleada se resume de la siguiente forma. Para la identificación de premisas se utilizan algoritmos de agrupación como Fuzzy C-means (FCM), y de distribución uniforme y la identificación de los consecuentes es la propuesta por Takagi y Sugeno.

En la identificación, el modelo utilizado procesa la información proporcionada para aproximar funciones. Teniendo evidencia numérica obtenida de funciones matemática

mas ruido añadido, el modelo trabaja con dicha evidencia proporcionando una salida aproximada a la inicial.

Una vez realizada la identificación, se valida el modelo resultante por medio del índice de correlación normalizado, en donde se comparan los datos iniciales con los obtenidos por el modelo, dando así, un valor en el rango de  $[-1,1]$  siendo 1 el valor que indica completa semejanza de los datos.

#### 4.1.1. Identificación de los parámetros en los consecuentes

Teniendo construidos los conjuntos difusos, se hace la identificación de consecuentes propuesta por Takagi y Sugeno, obteniendo un conjunto de reglas a evaluar.

Aplicadas las ecuaciones 2.12 y 2.16 para la identificación de consecuentes, y tratándose de una sola entrada en este caso en particular, se hace una reducción de cálculos al obtener la matriz  $X$ , debido a que la única columna de  $\beta_{11}, \dots, \beta_{1m}$  a calcular dará como correspondencia el valor de 1 para cada  $\beta_{1m}$  siendo  $X$  simplemente una matriz de  $2 \times m$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} \\ 1 & x_{12} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1m} \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

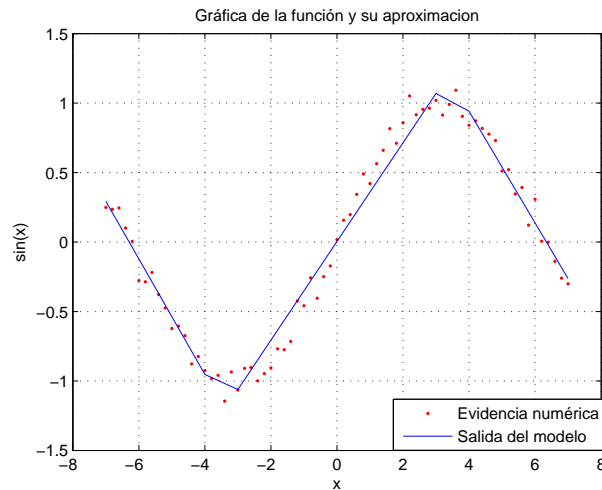
Una vez teniendo nuestra matriz  $X$ , aplicando las formulas 2.17 y 2.19 obtenemos nuestro vector  $P = [p_0^1, \dots, p_0^n, p_1^1, \dots, p_0^n, \dots, p_k^1, \dots, p_k^n]^T$ .

## 4.2. Resultados del Modelo para una entrada

### 4.2.1. Función 1

$$y = \sin(x) + \eta(0, 0.1)$$

El primer ejemplo es la función  $\sin(x)$ . Teniendo la evidencia en un rango de  $[-7, 7]$ , utilizamos sólo 2 conjuntos difusos inicialmente para observar su comportamiento.



**Figura 4.1:** Función muestreada  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-7, 7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación por FCM.

Reglas obtenidas:

$$y_1 = -0.3967x - 2.5191$$

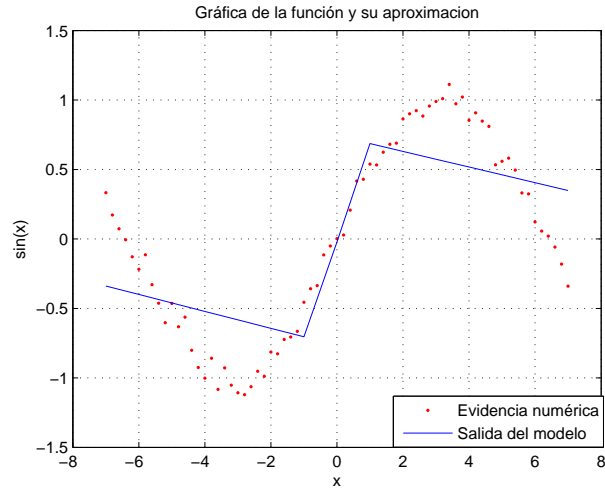
$$y_2 = 0.3461x - 0.0052$$

$$y_3 = 0.3461x - 0.0052$$

$$y_4 = -0.4122x + 2.5932$$

La Figura 4.1 nos muestra el resultado de la primer función dentro de un rango de  $[-7, 7]$  y FCM para la formación de los 2 conjuntos difusos de entrada. Ahora veamos cómo se comporta la misma función en las mismas condiciones, pero con la identificación de premisas de forma uniforme, Figura 4.2.





**Figura 4.2:** Función muestreada  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-7, 7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme.

Reglas obtenidas:

$$y_1 = -0.0657x - 0.7548$$

$$y_2 = -0.0657x - 0.7548$$

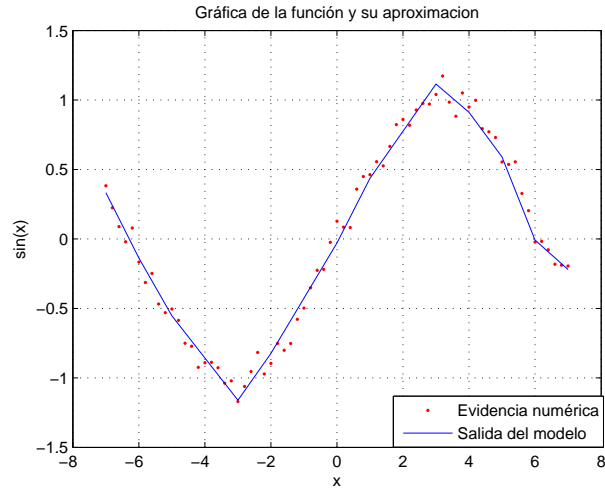
$$y_3 = -0.0724x - 0.7847$$

$$y_4 = -0.0724x + 0.7847$$

Cuando se hizo la identificación por medio de FCM se obtuvo un mejor desempeño dando un índice de correlación de 0.9857 entre los datos de entrada y los obtenidos por el modelo, mientras que con la distribución uniforme de los conjuntos se obtuvo un índice de 0.8359.

Siguiendo con la misma función pero incrementando el número a 5 conjuntos difusos, obtenemos que para el caso de identificación por FCM (en la Figura 4.3) y por distribución uniforme en la (Figura 4.4), los índices de correlación son de 0.9904 y 0.9925, respectivamente.

Algunas de las reglas obtenidas para el caso de diseño por Fuzzy C-means son los siguientes:



**Figura 4.3:** Función muestreada  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-7, 7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por FCM.

$$y_1 = -0.3349x - 2.0873$$

$$y_2 = -0.3150x - 2.1384$$

$$\vdots$$

$$y_9 = 1.8244x - 0.2514$$

$$y_{10} = -0.4273x + 2.6519$$

Por otra parte, los parámetros de algunas de las reglas identificados al crear conjuntos difusos de manera uniforme son los mostrados a continuación.

$$y_1 = -0.4559x - 2.9078$$

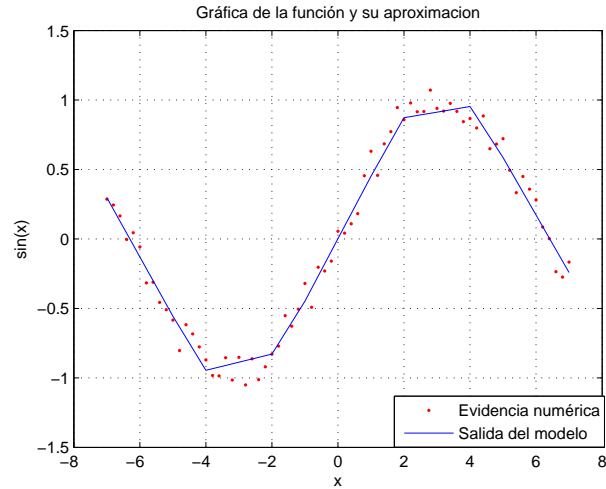
$$y_2 = -0.4559x - 2.9078$$

$$\vdots$$

$$y_9 = -0.4730x + 2.9181$$

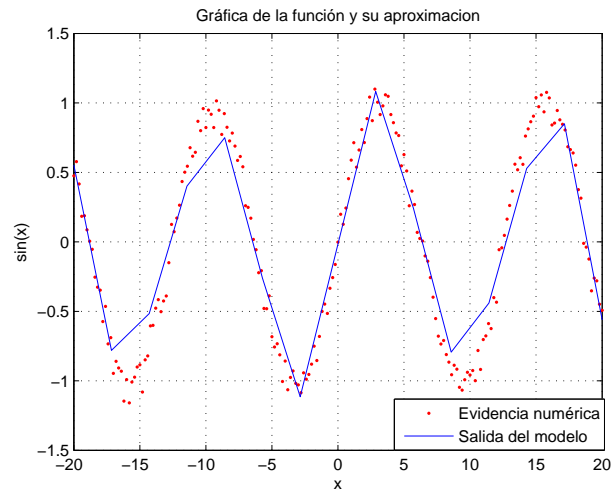
$$y_{10} = -0.4730x + 2.9181$$

Podemos apreciar que hasta el momento, las dos maneras de identificar las premisas proporcionan buenos resultados, dando índices de correlación altos e indicando alta similitud entre el modelo inicial y el identificado.



**Figura 4.4:** Función muestreada  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme.

Manteniendo la misma función  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$ , incrementamos el rango de muestreo a  $[-20,20]$ , y sólo aumentando a 6 conjuntos difusos. La respuesta obtenida cuando se utiliza la identificación de premisas basada en FCM se observa en la Figura 4.5 y para la distribución uniforme en la Figura 4.6.



**Figura 4.5:** Función muestreada  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-20,20]$ , 6 conjuntos difusos e identificación por FCM.

Ejemplos de reglas obtenidas para el primer caso en donde se aplica FCM, son:

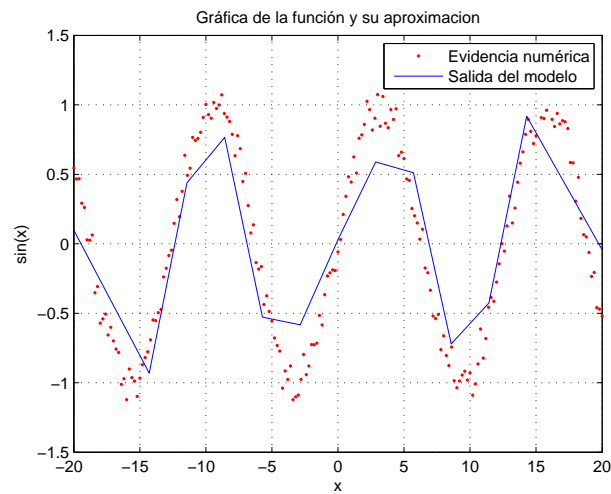
$$y_1 = -0.4768x - 8.9601$$

$$y_2 = 0.3210x + 4.0816$$

$$\vdots$$

$$y_{11} = 0.3018x - 3.8526$$

$$y_{12} = -0.4932x + 9.3237$$



**Figura 4.6:** Función muestreada  $\sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-20, 20]$ , 6 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme.

mientras que algunas de las reglas resultantes por la identificación de premisas por uniformidad son:

$$y_1 = -0.1796x - 3.5240$$

$$y_2 = -0.1796x - 3.5240$$

$$\vdots$$

$$y_{11} = -0.1726x + 3.4174$$

$$y_{12} = -0.1726x + 3.4174$$

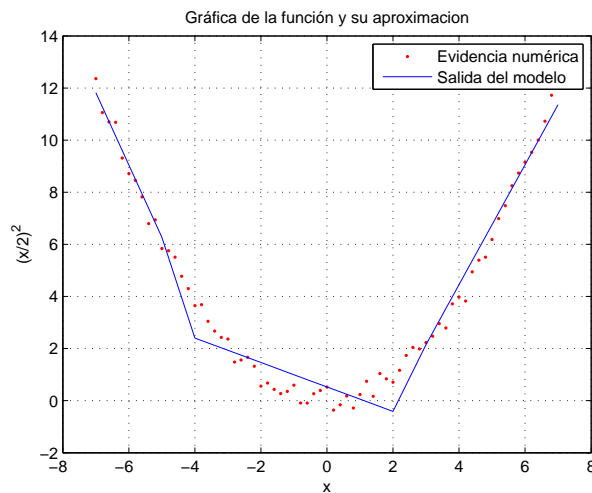
El índice de correlación obtenido para el caso de identificación basada en FCM es 0.9726, mientras que para la distribución equidistante es de 0.8799, lo cual es fácil de

notar entonces, que con la primera hay mayor similitud.

#### 4.2.2. Función 2

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \eta(0, 0.35)$$

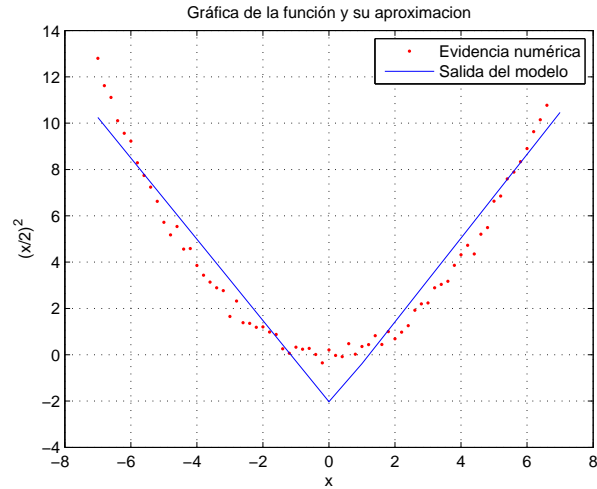
Cambiando ahora de función veamos diferentes casos de comportamiento. Para nuestra primera prueba analizamos el problema con 2 conjuntos difusos y un rango de  $[-7,7]$ , de igual manera tendremos dos comparaciones, por FCM y por distribución uniforme en la construcción de nuestros conjuntos difusos.



**Figura 4.7:** Función muestreada  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \eta(0, 0.35)$   $[-7,7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación por FCM.

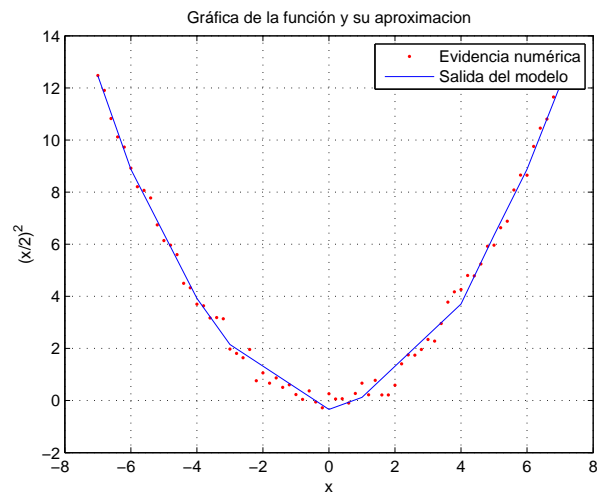
Para el caso con FCM se obtiene un coeficiente de correlación de 0.9875 entre el modelo inicial y el obtenido, mientras que para el segundo caso de distribución uniforme se tiene uno de 0.9589. Las figuras que muestran los resultados son Figura 4.7 y Figura 4.8 respectivamente. Cabe señalar, que no se considera necesaria la muestra de las reglas obtenidas a partir de este ejemplo y hasta concluir los resultados para una variable en la entrada.

Tratando el mismo ejemplo, aumentamos el número de conjuntos difusos a 5, analizando así los resultados. Para el caso de la identificación de premisas basada en FCM se

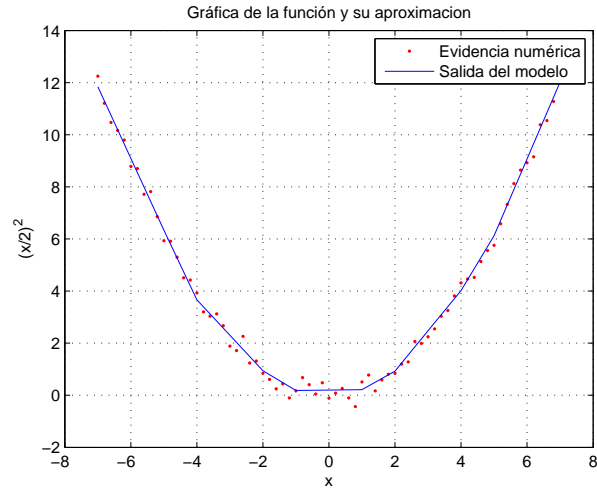


**Figura 4.8:** Función muestreada  $(\frac{x}{2})^2 + \eta(0, 0.35)$   $[-7, 7]$ , 2 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme.

obtiene el resultado mostrado en la Figura 4.9, proporcionando un índice de correlación de 0.9967. Así mismo, la Figura 4.10 nos indica la salida de nuestro modelo cuando se realizó una construcción de conjuntos difusos de forma uniformemente distribuida, dando una correlación de 0.9959.



**Figura 4.9:** Función muestreada  $(\frac{x}{2})^2 + \eta(0, 0.35)$   $[-7, 7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por FCM.



**Figura 4.10:** Función muestreada  $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \eta(0, 0.35) [-7,7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación de forma uniforme.

### 4.2.3. Función 3

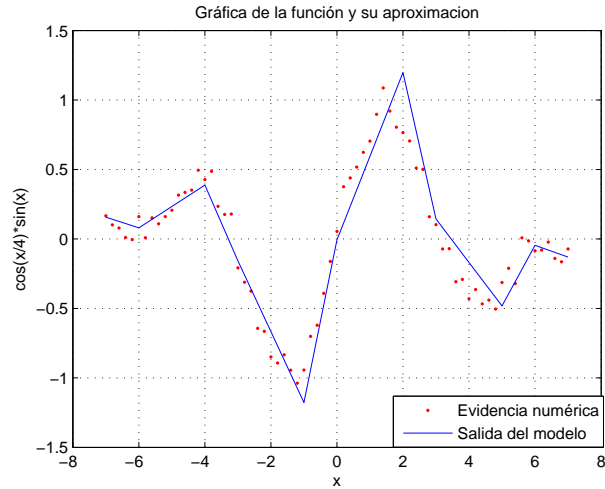
$$y = \cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$$

Por último, para el análisis de una variable de entrada, identifiquemos una tercer función sinusoidal mas compleja. Nuevamente, contando con la comparación por FCM y una distribución uniforme, en el diseño de los conjuntos difusos de entrada.

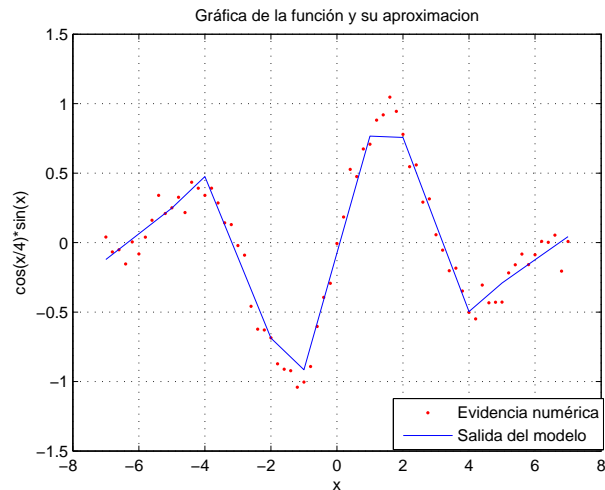
Primero haremos el análisis dentro de un rango de  $[-7,7]$  con 5 conjuntos difusos. La Figura 4.11 muestra el resultado cuando se trabajó por FCM, y la Figura 4.12 muestra el resultado en donde se identificaron las premisas de forma uniforme.

Para el primer caso el índice de correlación es de 0.9482, mientras que para el segundo caso es de 0.9785.

Utilizando la misma función pero en un rango de  $[-15,15]$  y 10 conjuntos difusos podemos analizar los resultados viendo la Figura 4.13 que nos muestra la identificación de consecuentes para nuestro primer caso.



**Figura 4.11:** Función muestreada  $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-7, 7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por FCM.

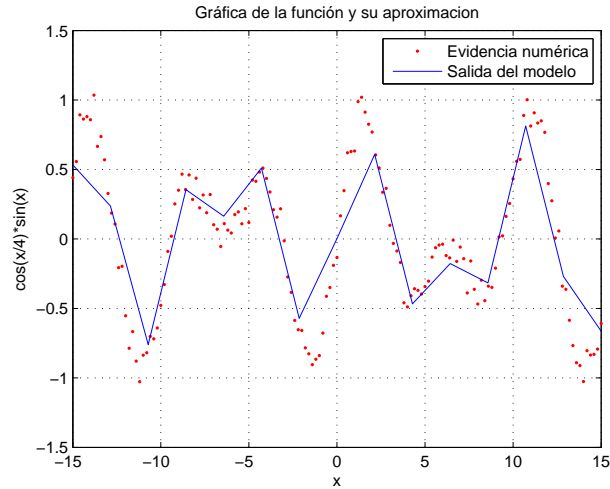


**Figura 4.12:** Función muestreada  $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-7, 7]$ , 5 conjuntos difusos e identificación por distribución uniforme.

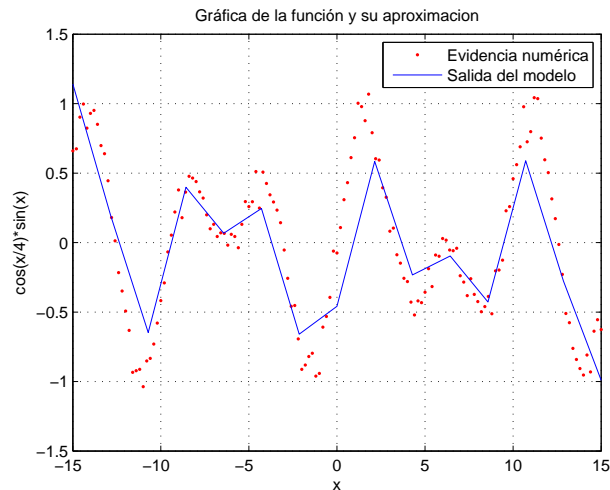
Cuando se identifican las premisas por la distribución uniforme se obtiene un resultado el cual se muestra en la Figura 4.14.

La similitud entre caso y caso, es parecida. Cuando se hace una identificación de premisas por FCM se obtiene un resultado del modelo de 0.9752 en su índice de correlación, mientras que en el otro caso se obtiene un índice de 0.9147.



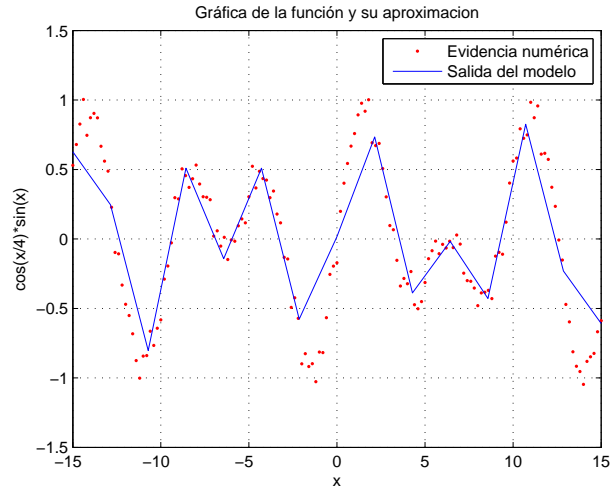


**Figura 4.13:** Función muestreada  $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-15, 15]$ , 10 conjuntos difusos e identificación por FCM.



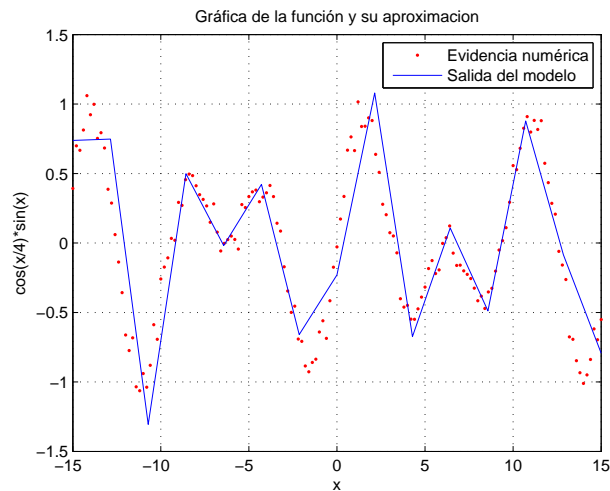
**Figura 4.14:** Función muestreada  $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-15, 15]$ , 10 conjuntos difusos e identificación por distribución uniforme.

Manteniendo la función y el rango, pero aumentando el número de conjuntos difusos a 14 se obtiene un mejor desempeño del modelo. La Figura 4.15 nos muestra el comportamiento que se obtiene en el primer caso, o sea, por identificación de premisas por FCM. El índice de correlación obtenido es de 0.9835.



**Figura 4.15:** Función muestreada  $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-20, 20]$ , 14 conjuntos difusos e identificación por FCM.

Para el segundo caso, donde se hace una identificación por distribución uniforme, el desempeño del modelo es mostrado por la Figura 4.16, y se obtiene un índice de 0.9748.



**Figura 4.16:** Función muestreada  $\cos\left(\frac{x}{4}\right) * \sin(x) + \eta(0, 0.1)$   $[-20, 20]$ , 14 conjuntos difusos e identificación por distribución uniforme.

### 4.3. Ejemplo de posible aplicación en el análisis de textura

Como parte del estudio de modelos aproximando funciones de una variable, se hace una prueba con una imagen de una propiedad de textura en la cual se pretende suavice cada una de las regiones, a fin de poder realizar una segmentación mejorada, y no obtener ruido presentado como la existencia de regiones pequeñas dentro de los mayores.

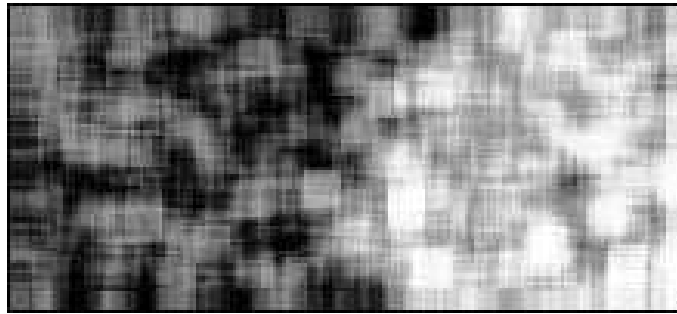


Figura 4.17: Imagen original.

Teniendo una imagen inicial, Figura 4.17, se somete ésta textura al proceso de identificación de nuestro modelo renglón por renglón hasta el número de píxeles verticales de la imagen. Una vez terminada la identificación horizontal, se procesa verticalmente, recorriendo columna por columna, así hasta recorrer todos los píxeles horizontales. El resultado del proceso se muestra en la Figura 4.18, en la cual se observa una imagen suavizada. El número de conjuntos difusos utilizados fue de diez para cada procesado de renglón y columna.



Figura 4.18: Imagen de textura obtenida de acuerdo al modelo identificado.

El objetivo de este proceso como se mencionó, es el de suavizar la imagen de manera que se puedan distinguir claramente las regiones. Luego, se umbralizan ambas imágenes y se puede hacer una comparación.



Figura 4.19: Imagen original umbralizada.

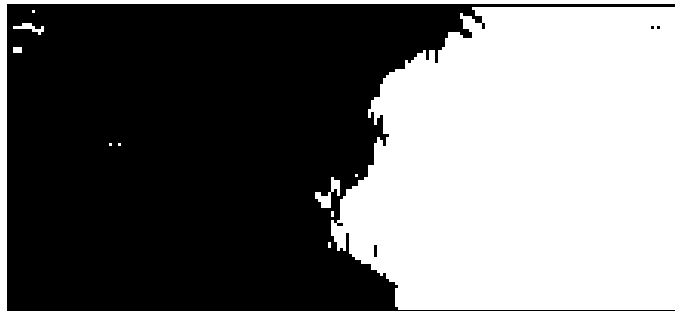


Figura 4.20: Imagen procesada y umbralizada.

La Figura 4.19 nos muestra la imagen original umbralizada, en donde se pueden apreciar regiones espurias al interior de las regiones mayores. Mientras que en la Figura 4.20 se puede observar que se separan casi por completo una region de la otra, apreciándose con mayor claridad la division entre ambas.

# Pruebas y resultados para la identificación de funciones en dos y tres variables de entrada

---

Teniendo en cuenta que el objetivo del trabajo es modelar sistemas difusos de múltiples entradas y salidas, en este capítulo se presentan pruebas y los resultados generados al identificar evidencia numérica de 2 variables de entrada, en adelante.

La evidencia numérica es generada usando funciones matemáticas de acuerdo al número de variables, es decir, para dos entradas se tendrá una gráfica de una superficie  $z = f(x, y)$ .

Al tratar una función de tres variables se complica la forma de visualizar el resultado, esto debido a que interviene una cuarta variable, la de salida. Por este motivo para el trabajo sólo se cubrirá el análisis hasta tres variables de entrada.

## 5.1. Identificación y Aproximación de modelos de 2 variables de entrada

La identificación de premisas se ha hecho solamente por el método de distribución uniforme. Esto, debido a que en base a los resultados de modelos con una variable de entrada, resultó dar buenos resultados, y a su vez, resulta de mayor simplicidad implementar esta metodología de identificación de premisas en el modelado para más de dos variables de entrada.

En el modelado difuso de sistemas de dos variables de entrada se evalúan diferentes combinaciones de conjuntos difusos, con el fin de encontrar la combinación que mejor identifique al sistema.

Teniendo el diseño de conjuntos difusos del tipo triángulo rectangular, el análisis comienza con la combinación de  $2 \times 2$  conjuntos, hasta llegar a una combinación de  $12 \times 12$  conjuntos de este tipo. Al final se compara cada uno de los índices de correlación correspondientes a cada combinación, indicando el grado de similitud de los resultados obtenidos mediante el sistema identificado al compararlos con el conjunto de datos de entrada. El modelo con mayor índice de correlación es el modelo óptimo para el sistema, el cual es mostrado en los resultados.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para cinco funciones diferentes con dos variables de entrada, algunas de ellas variando el rango de las variables de entrada. Se muestra la evidencia numérica base (datos de la función sin ruido), evidencia numérica considerada (datos con ruido) y el resultado utilizando el modelo identificado.

## 5.2. Resultados del Modelado para dos entradas

### 5.2.1. Identificación de funciones prueba en rango de $[-50, 50]$

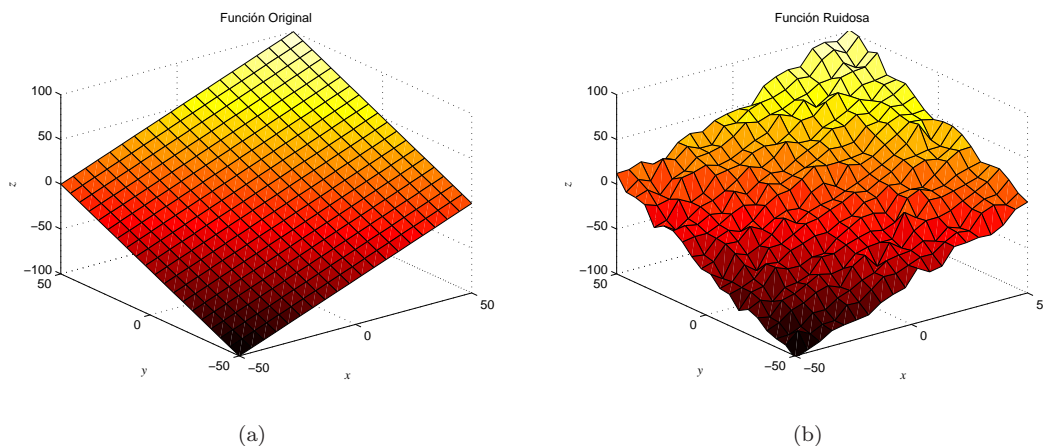
Las funciones en el rango de  $[-50, 50]$  contienen 121 muestras uniformemente distribuidas en un espacio, con 11 divisiones por eje, siendo  $11 \times 11 = 121$ .

#### Función 1

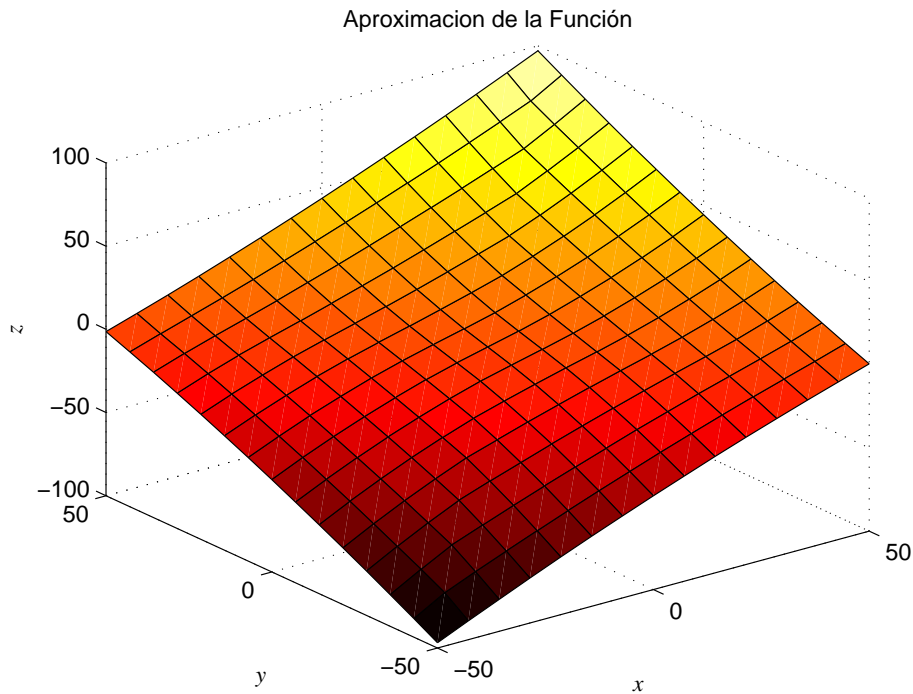
$$z = x + y + \eta(0, 5)$$

En la Figura 5.1(a) tenemos la función original, la cual es la base para poder hacer una función ruidosa con la que trabajaremos como evidencia numérica. La función con ruido se muestra en la Figura 5.1(b).

Esta función de  $z = x + y + \eta(0, 5)$  se caracteriza por ser una función simple, con la cual el método implementado responde muy bien cumpliendo en cuanto a la reducción de reglas y dando la mejor aproximación con 2 conjuntos difusos por entrada. Así, con 4 reglas nuestro modelo obtiene la mejor identificación obteniéndose un valor de 0.9971 como coeficiente de correlación.



**Figura 5.1:** (a) Función original  $z = x + y$  y (b) Evidencia numérica analizada en el rango  $[-50, 50]$ .



**Figura 5.2:** Función aproximada  $z = x + y + \eta(0, 5)$   $[-50, 50]$ .

Reglas obtenidas:

$$y_1 = 1.6330x_1 + 1.7257x_2 + 16.2176$$

$$y_2 = 3.1181x_1 + 3.1274x_2 + 0.3310$$

$$y_3 = 3.1138x_1 + 3.1433x_2 - 0.7080$$

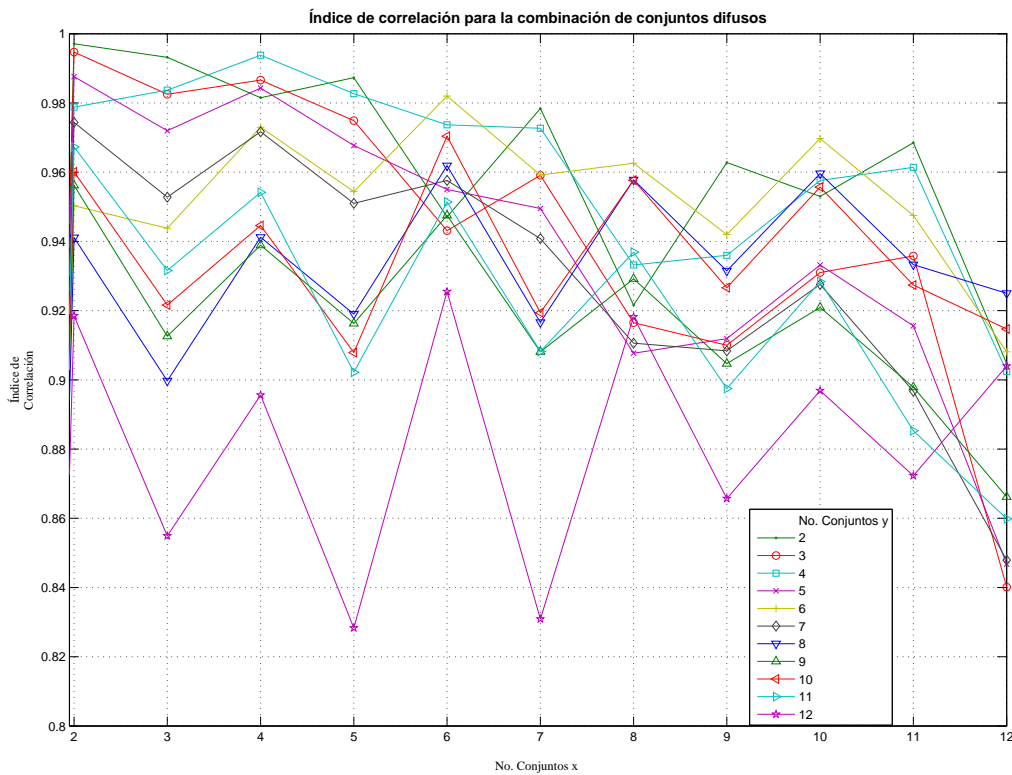
$$y_4 = 1.6338x_1 + 1.7148x_2 - 16.0490$$

La Figura 5.2 nos muestra la aproximación de los dos conjuntos por entrada, evaluando las 4 reglas para realizar esta aproximación. Se muestra solamente para este ejemplo la Tabla 5.1 que indica los índices de correlación obtenidos para cada una de las diferentes particiones en conjuntos difusos. Así mismo, la Figura 5.3 muestra gráficamente los índices obtenidos. Con fin de poder apreciar mejor el comportamiento de los índices de correlación, se muestra una superficie formada por ellos en la Figura 5.4.

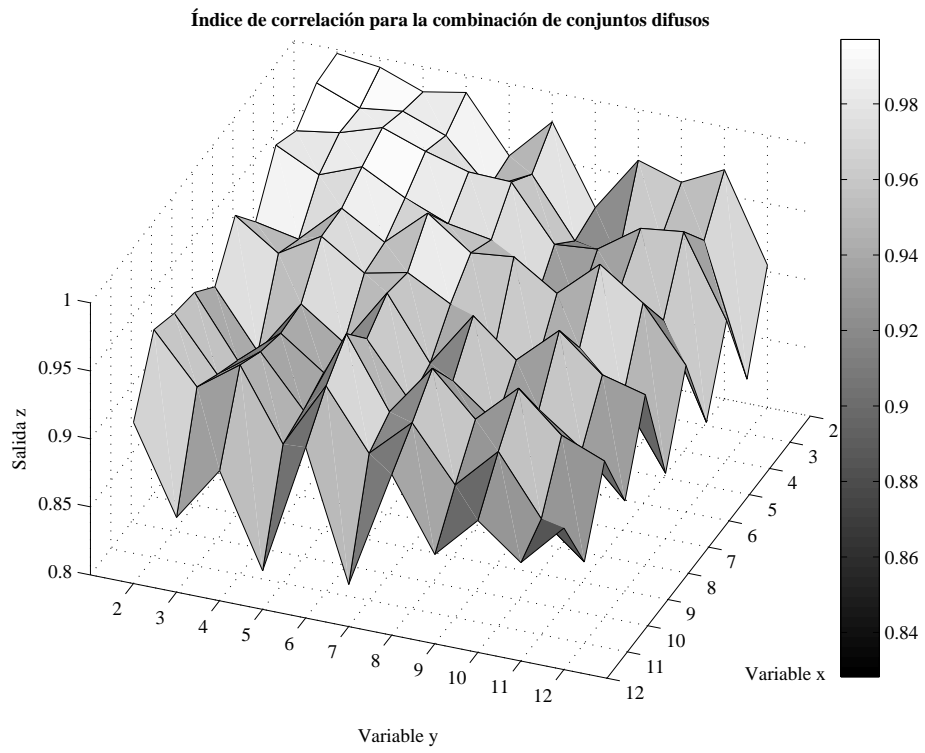


Conjuntos	2 (y)	3 (y)	4 (y)	5 (y)	6 (y)	7 (y)	8 (y)	9 (y)	10 (y)	11 (y)	12 (y)
2 (x)	<b>0.9971</b>	0.9947	0.9788	0.9876	0.9503	0.9744	0.9411	0.9562	0.9601	0.9673	0.9185
3 (x)	0.9932	0.9825	0.9837	0.9720	0.9438	0.9528	0.8997	0.9126	0.9216	0.9316	0.854
4 (x)	0.9815	0.9866	0.9938	0.9843	0.9730	0.9717	0.9412	0.9389	0.9446	0.9542	0.8956
5 (x)	0.9873	0.9749	0.9827	0.9677	0.9544	0.9510	0.9190	0.9163	0.9079	0.9022	0.8283
6 (x)	0.9471	0.9431	0.9737	0.9550	0.9820	0.9576	0.9619	0.9475	0.9704	0.9514	0.9255
7 (x)	0.9784	0.9591	0.9727	0.9495	0.9592	0.9408	0.9166	0.9081	0.9194	0.9082	0.8309
8 (x)	0.9216	0.9165	0.9332	0.9077	0.9626	0.9106	0.9578	0.9292	0.9577	0.9369	0.9182
9 (x)	0.9628	0.9100	0.9360	0.9119	0.9420	0.9084	0.9315	0.9047	0.9266	0.8975	0.8657
10 (x)	0.9530	0.9310	0.9576	0.9332	0.9697	0.9276	0.9596	0.9209	0.9557	0.9284	0.8969
11 (x)	0.9685	0.9358	0.9614	0.9156	0.9475	0.8967	0.9333	0.8979	0.9274	0.8853	0.8723
12 (x)	0.9047	0.8401	0.9024	0.8468	0.9081	0.8479	0.9250	0.8662	0.9147	0.8599	0.9040

**Tabla 5.1:** Valores de correlación de acuerdo al número de particiones de las variables de entrada para  $z = x + y + \eta(0, 5)$   $[-50, 50]$



**Figura 5.3:** Gráfica de índices de correlación de la Función  $z = x + y + \eta(0, 5)$ .

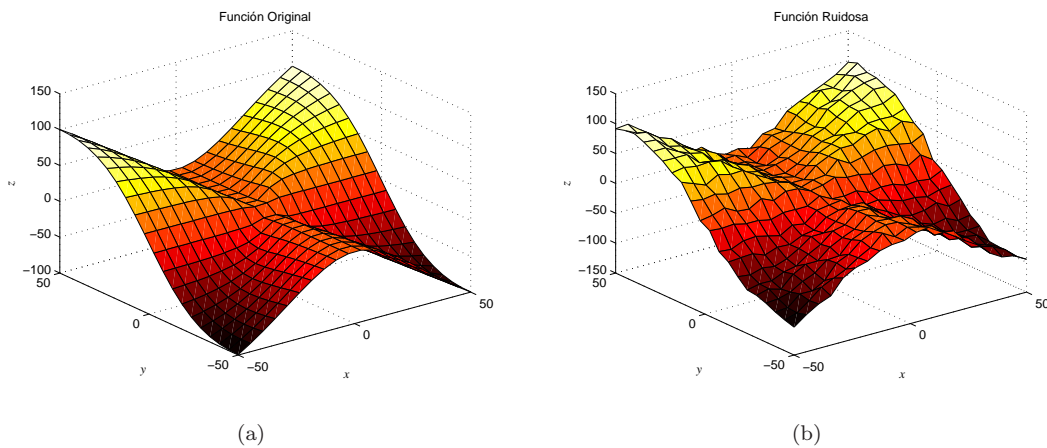


**Figura 5.4:** Superficie para índices de correlación de la Función  $z = x + y + \eta(0, 5)$ .

## Función 2

$$z = \frac{1}{2} + 64 \left( \frac{(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{8})}{1 + (4x - 2)^2 + (4y - 2)^2} \right) + \eta(0, 5)$$

La Función 2, se puede apreciar en la Figura 5.5(b) es una función con más variaciones en su estructura por lo cual resulta más compleja su identificación.



**Figura 5.5:** (a) Función original  $z$  y (b) Evidencia numérica analizada en el rango  $[-50,50]$ .

Realizadas las pruebas para esta evidencia numérica, resultó con mejor aproximación las particiones de 4 conjuntos en la primera entrada y 11 conjuntos en la segunda, sumando un total de 44 reglas a evaluar y dando como índice de correlación 0.9405. Su representación se muestra en la Figura 5.6, ésta identificación se obtuvo de la evidencia numérica mostrada en la Figura 5.5(b). La Figura 5.7 muestra los índices de correlación obtenidos en las pruebas para cada combinación de conjuntos difusos y la superficie de ellos en la Figura 5.8.

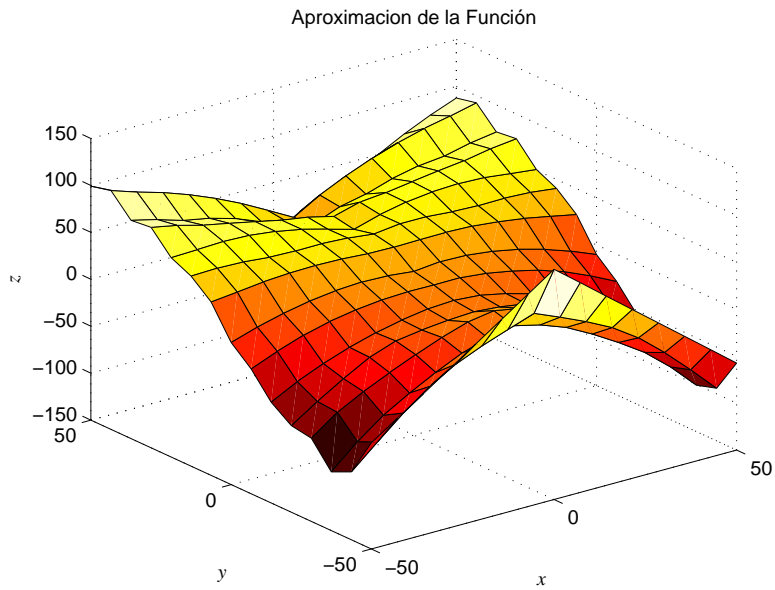


Figura 5.6: Función z aproximada en el rango [-50,50].

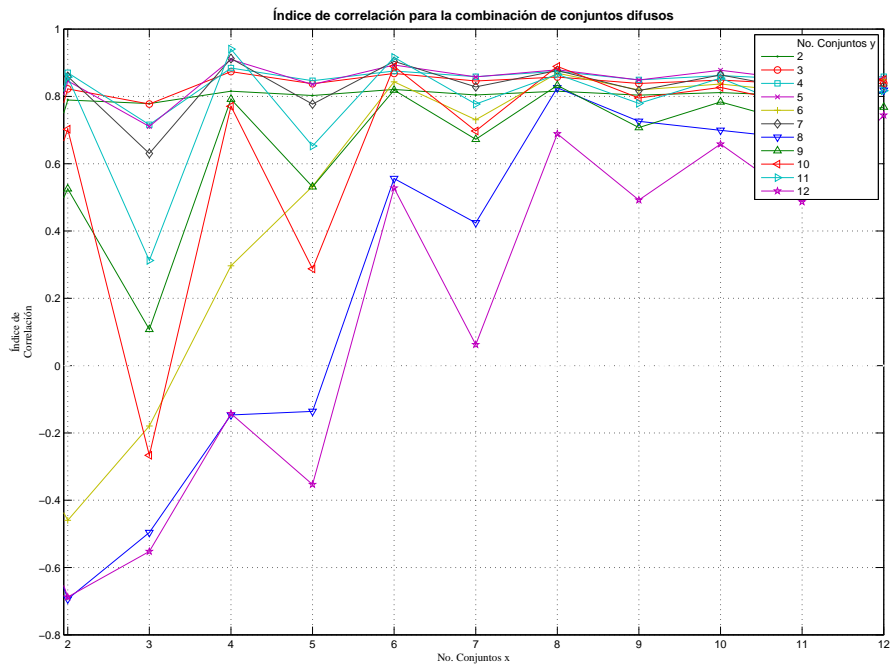
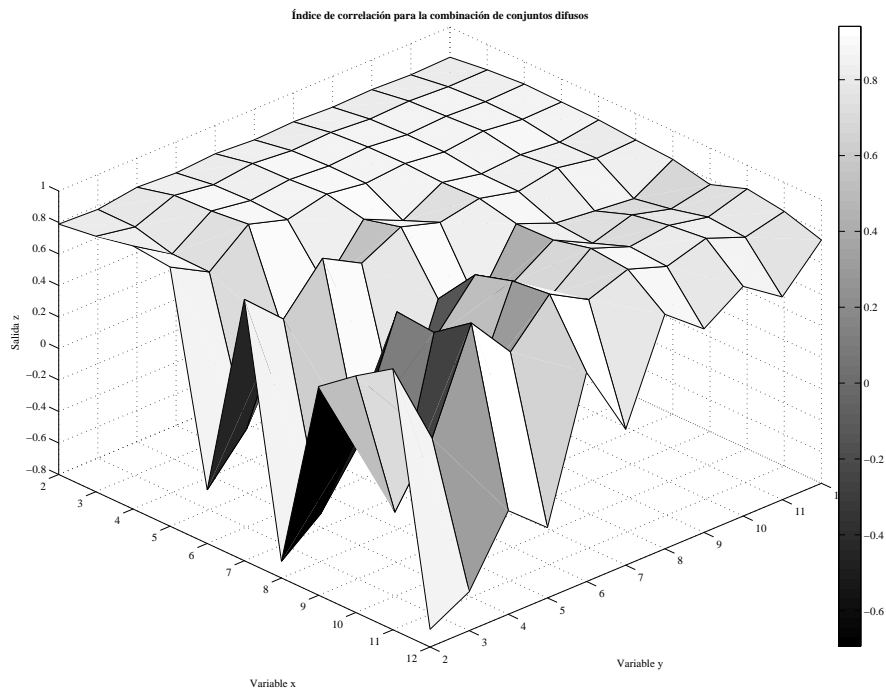


Figura 5.7: Gráfica de índices de correlación de la Función  $z = \frac{1}{2} + 64 \left( \frac{(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{8})}{1+(4x-2)^2+(4y-2)^2} \right) + \eta(0, 5)$ .



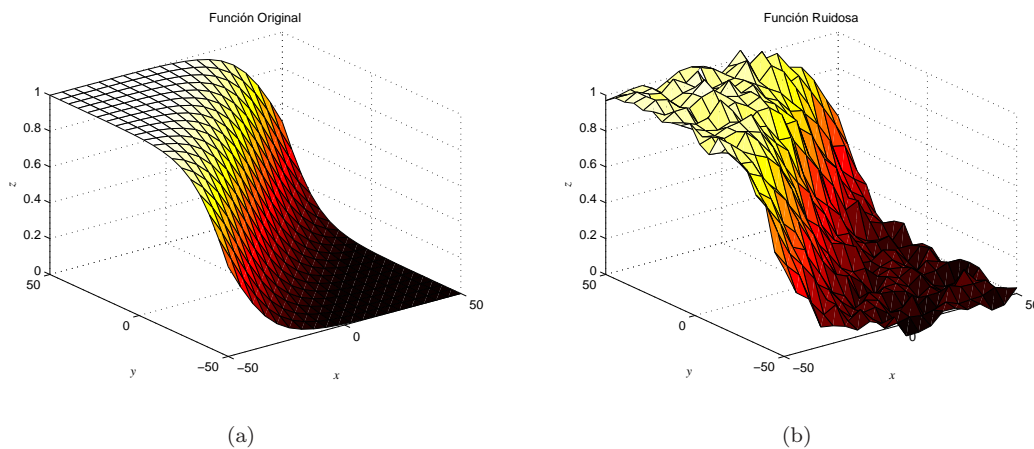
**Figura 5.8:** Superficie para índices de correlación de la Función  $z = \frac{1}{2} + 64 \left( \frac{(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{8})}{1+(4x-2)^2+(4y-2)^2} \right) + \eta(0, 5)$ .

**Función 3**

$$z = \frac{1}{1 + e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$$

Esta función tiene una forma de cascada, lo cual resulta complicado su análisis para la identificación. El cambio de valores para  $y$  entre 0 y 1, se presenta de forma que los conjuntos difusos no contienen suficiente evidencia numérica. Todo esto, conduce a no obtener un modelo resultante deseado.

La Figura 5.9(a) muestra la función real, siendo la referencia para formación de la evidencia numérica mostrada por la Figura 5.9(b) y resultando una aproximación mostrada en la Figura 5.10, con un coeficiente de correlación de 0.9048 y 2 conjuntos difusos para la entrada uno y 3 conjuntos difusos para la segunda entrada. La Figura 5.11 y la Figura 5.12 contiene los índices de correlación obtenidos en este ejemplo.



**Figura 5.9:** (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango  $[-50,50]$ .

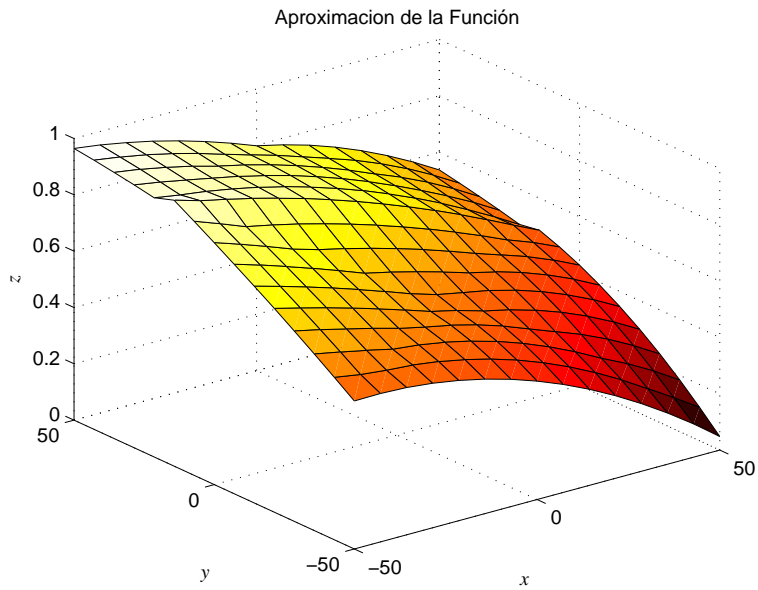


Figura 5.10: Función  $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$  aproximada en el rango  $[-50, 50]$ .

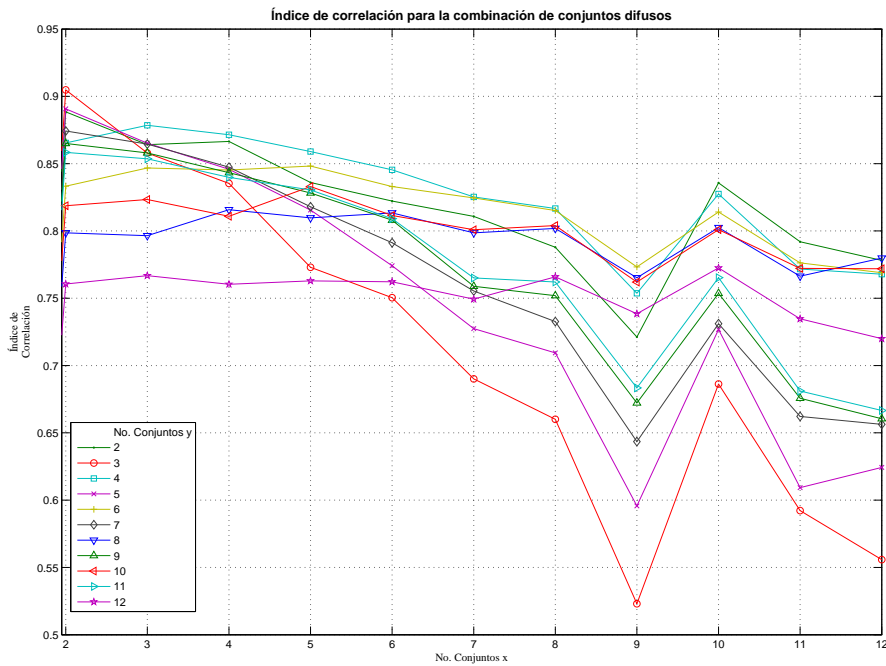


Figura 5.11: Gráfica de índices de correlación de la Función  $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$ .

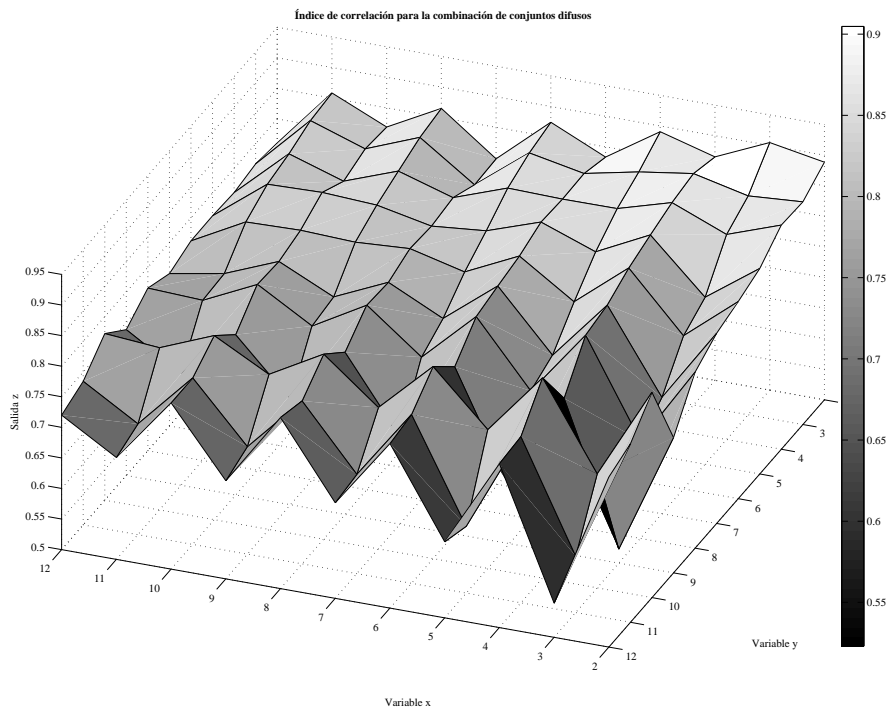


Figura 5.12: Superficie por índices de correlación de la Función  $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$ .



## Función 4

$$z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$$

Al igual que la función anterior, ésta es una función de mucha dificultad por su forma. Dicha función es mostrada en la Figura 5.13(a) y la evidencia numérica creada en la Figura 5.13(b), donde se obtuvo un coeficiente de correlación de 0.9070 para un modelo resultante (Figura 5.14, con 12 conjuntos difusos para la primer entrada y 2 conjuntos difusos en la segunda entrada. Los índices obtenidos en las pruebas se observan en la Figura 5.15 y la Figura 5.16.

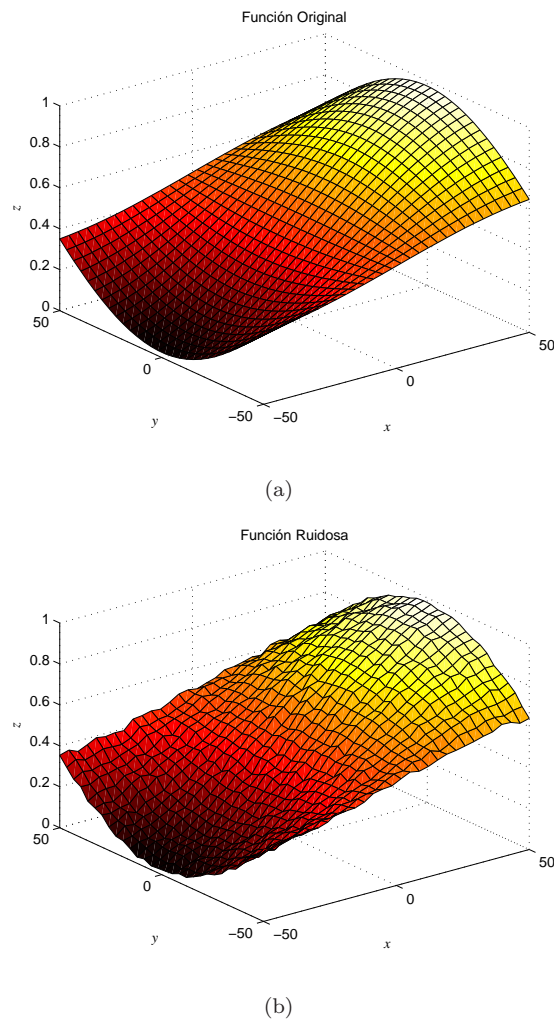


Figura 5.13: (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango [-50,50].

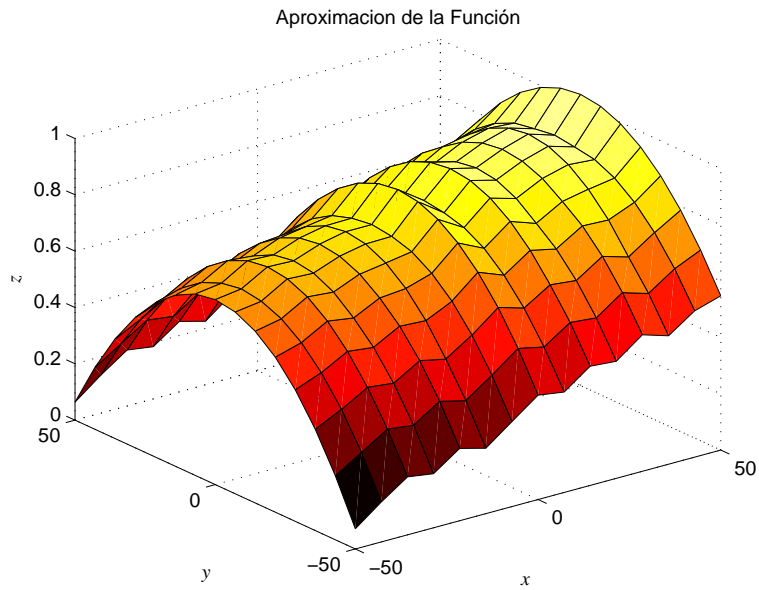


Figura 5.14: Función  $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$  aproximada en el rango  $[-50,50]$ .

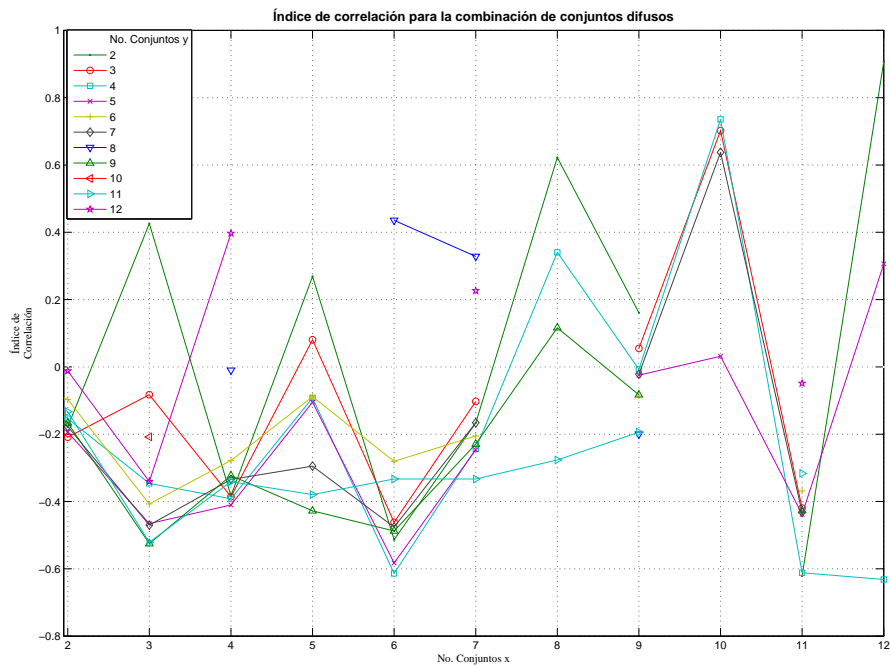


Figura 5.15: Gráfica de índices de correlación de la Función  $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$  .

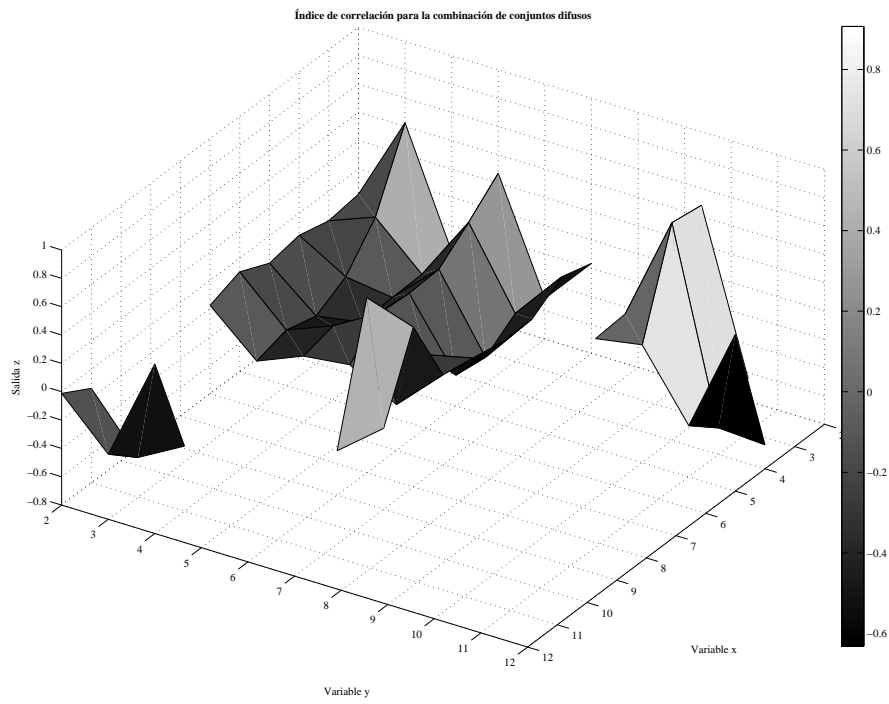
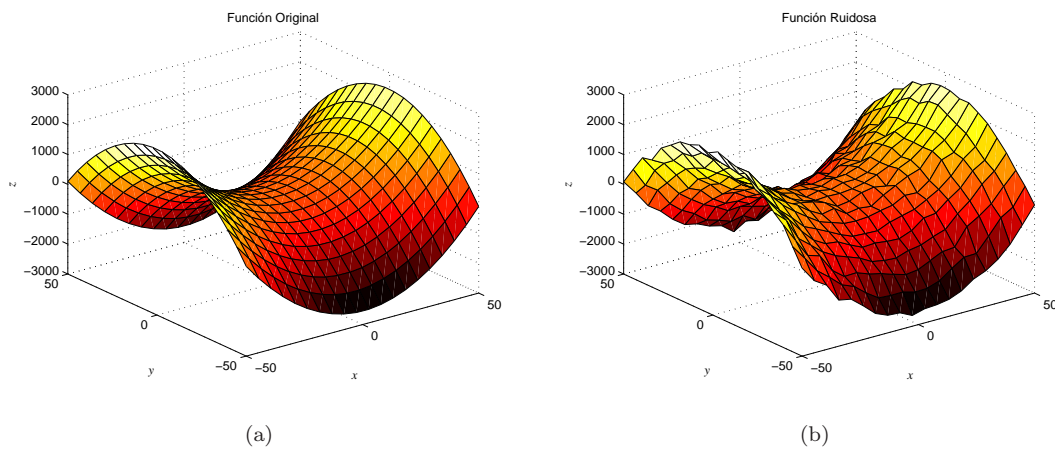


Figura 5.16: Superficie para índices de correlación de la Función  $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$  .

## Función 5

$$z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta(0, 100)$$

Para esta función se tiene una excelente respuesta, al igual que la Función 1, ya que desde 2 conjuntos difusos en cada una de las entradas obtenemos un coeficiente de correlación alto, demostrando su alta similitud con la evidencia numérica. El valor óptimo, con 6 conjuntos difusos en cada entrada, es de 0.9814. La Figura 5.17(a) y Figura 5.17(b) muestran la entrada al sistema, mientras que la Figura 5.18 es nuestro resultado.



**Figura 5.17:** (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango  $[-50,50]$ .

De igual manera, se muestra en la gráfica de la Figura 5.19 y la superficie de la Figura 5.20, los distintos índices de correlación obtenidos en las pruebas.

Para los ejemplos anteriores se mostró una gráfica, indicando los diferentes índices de correlación de las distintas combinaciones de conjuntos difusos obtenidos en las pruebas. En algunos casos, existe discontinuidad en algunos puntos de las rectas, esto es debido en que ciertas combinaciones de conjuntos no se obtuvo una identificación, ya que la evidencia no era suficiente para incorporarse en la cantidad de conjuntos considerados.

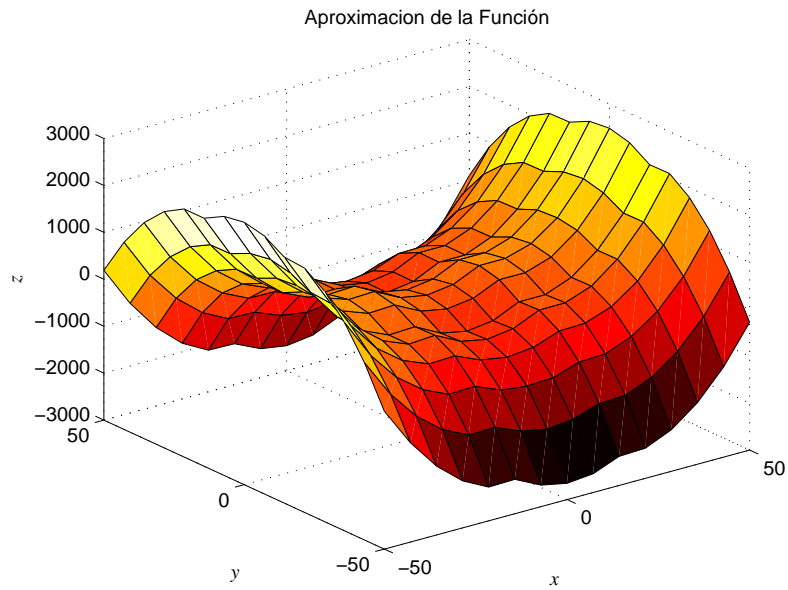


Figura 5.18: Función  $z = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 + \eta(0, 100)$  aproximada en el rango  $[-50, 50]$ .

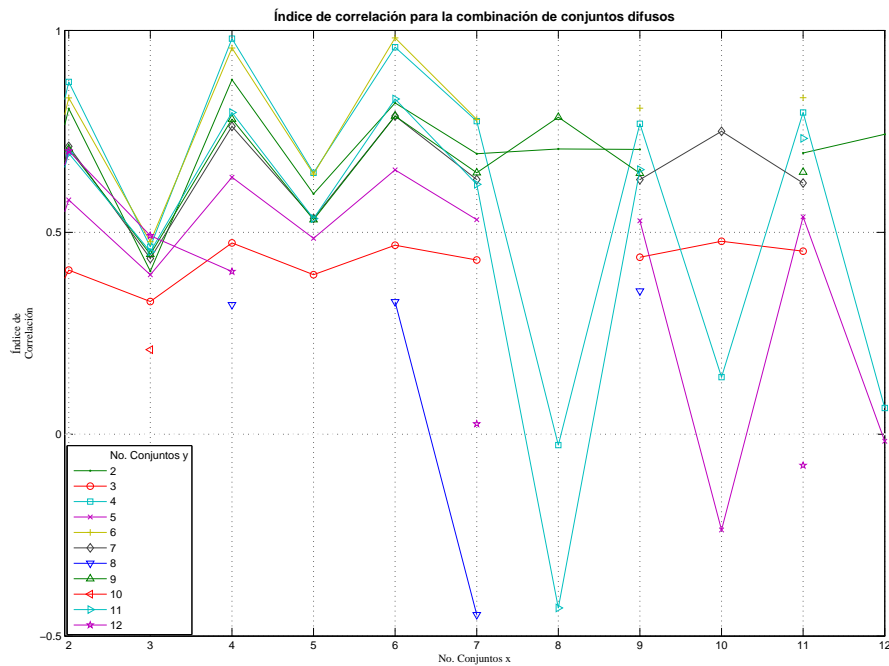
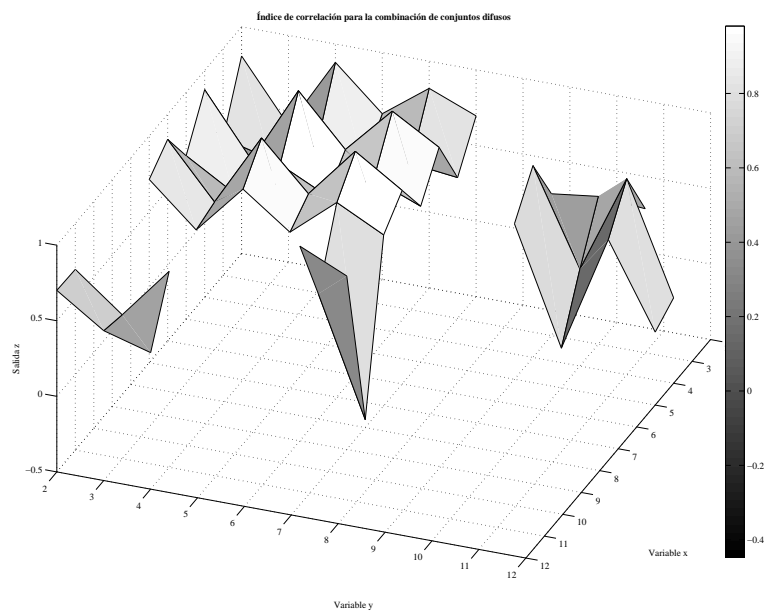


Figura 5.19: Gráfica de índices de correlación de la Función  $z = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 + \eta(0, 100)$ .



**Figura 5.20:** Superficie para índices de correlación de la Función  $z = (x - \frac{1}{2})^2 - (y - \frac{1}{2})^2 + \eta(0, 100)$ .

### 5.2.2. Identificación de funciones prueba en el rango de [-100, 100]

Las funciones de prueba dentro de este rango son muestreadas con 441 puntos, de manera que existan 21 divisiones uniformemente distribuidos por eje.

## Función 1

$$z = x + y + \eta(0, 5)$$

De la misma forma que 121 puntos, con 441 obtenemos una aproximación (Figura 5.22) bastante buena teniendo 0.9972 de similitud con la señal original (Figura 5.21(a) y Figura 5.21(b)). Esto sucede con el modelado de 2 conjuntos difusos por entrada.

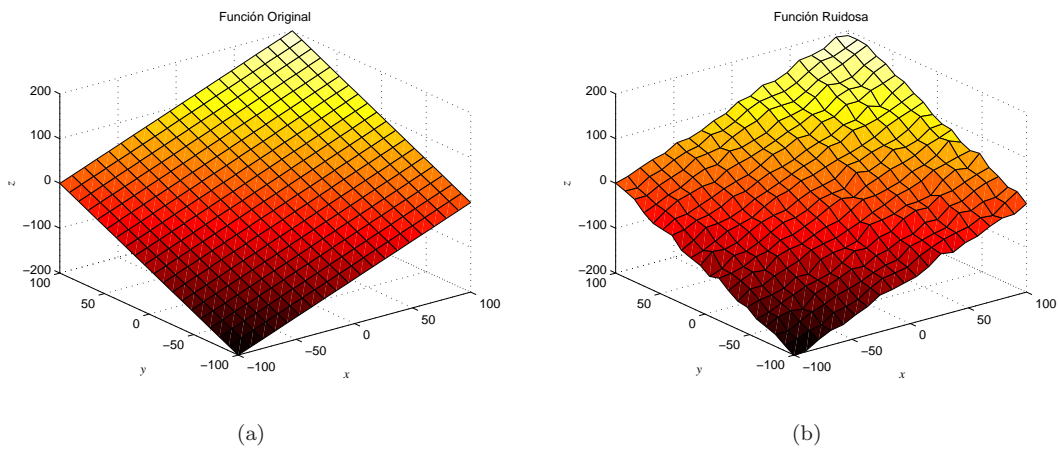


Figura 5.21: (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango  $[-100,100]$ .

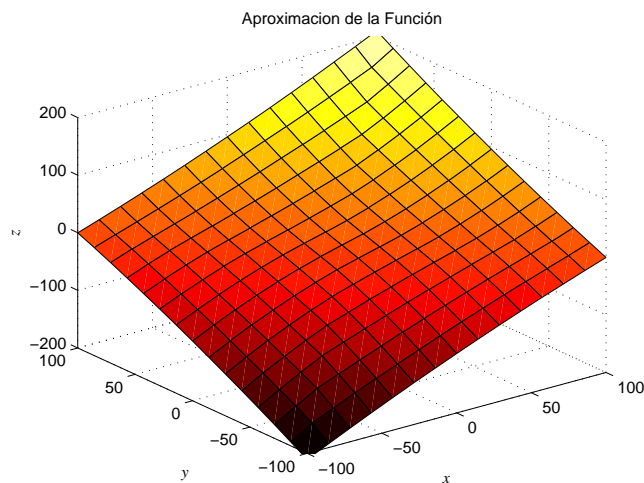
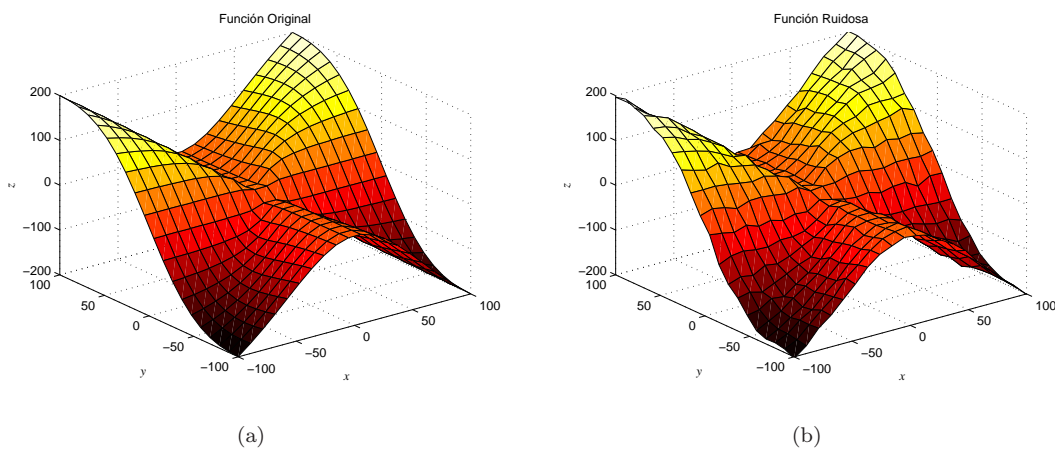


Figura 5.22: Función  $z = x + y + \eta(0, 5)$  aproximada en el rango  $[-100,100]$ .

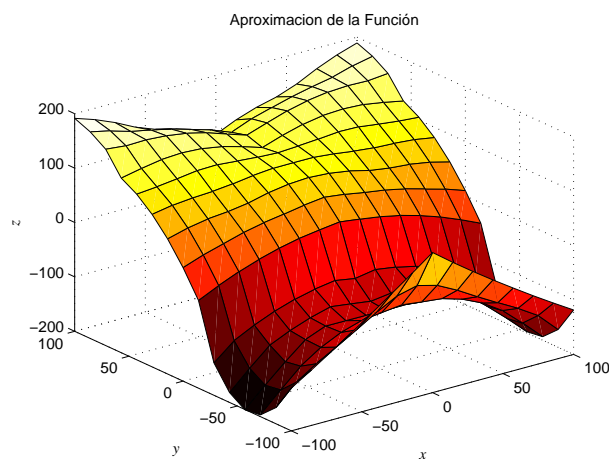
## Función 2

$$z = \frac{1}{2} + 64 \left( \frac{(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2})(x + \frac{1}{8})}{1 + (4x - 2)^2 + (4y - 2)^2} \right) + \eta(0, 5)$$

Siendo una función complicada de aproximar, teniendo 441 muestras la función mostrada por la Figura 5.23(a) y la Figura 5.23(b), se obtiene una aproximación (Figura 5.24) con una similitud de 0.9089 máxima cuando se tienen 4 conjuntos difusos para la primer entrada y 5 para la segunda entrada.



**Figura 5.23:** (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango [-100,100].



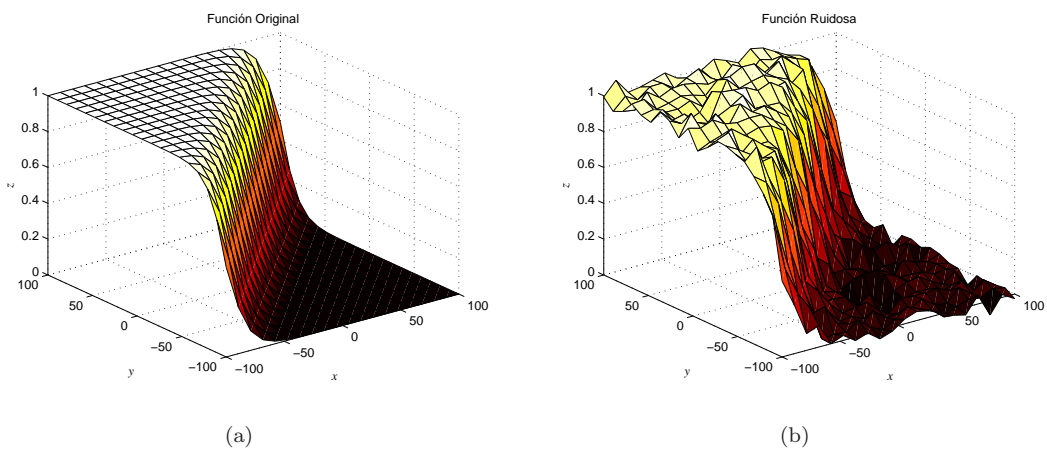
**Figura 5.24:** Función  $z$  aproximada en el rango [-100,100].



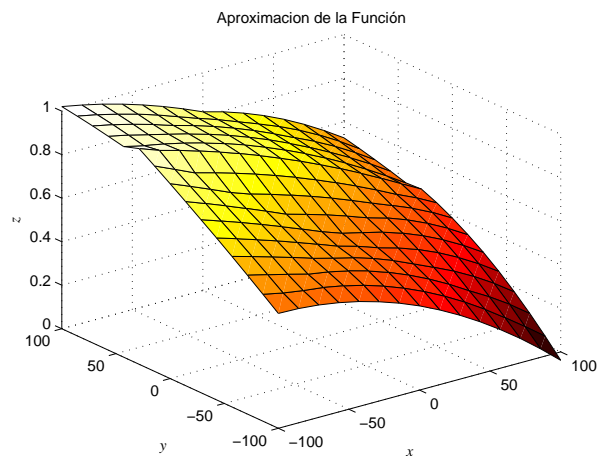
## Función 3

$$z = \frac{1}{1 + e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$$

La evidencia numérica de esta función a pesar de ser mayor, la respuesta del modelo sigue indicando la complejidad de dicha función, ya que con 2 conjuntos difusos en la primer entrada y 3 en la segunda se obtiene el mayor índice de correlación dando una similitud de 0.8613, como se observa en la Figura 5.26.



**Figura 5.25:** (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango  $[-100,100]$ .



**Figura 5.26:** Función  $z = \frac{1}{1+e^{0.1(x+y)}} + \eta(0, 0.05)$  aproximada en el rango  $[-100,100]$ .

## Función 4

$$z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$$

La mejor aproximación (Figura 5.28) se obtiene de 3 conjuntos difusos en la primer entrada y 2 en la segunda dando un máximo índice de correlación de 0.3545. Esto nos indica que para este tipo de funciones nuestro modelo no es lo suficientemente bueno como para detectar sus variantes y su aproximación es indeseable.

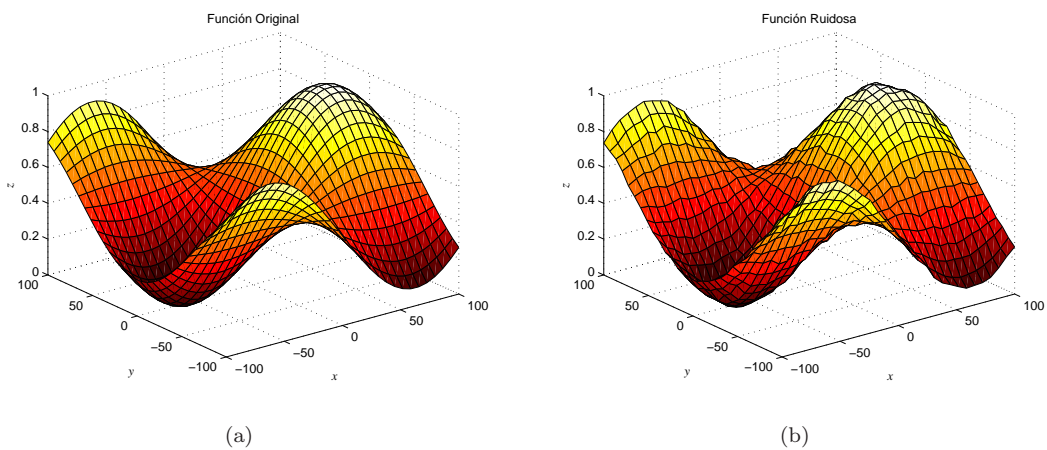


Figura 5.27: (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango [-100,100].

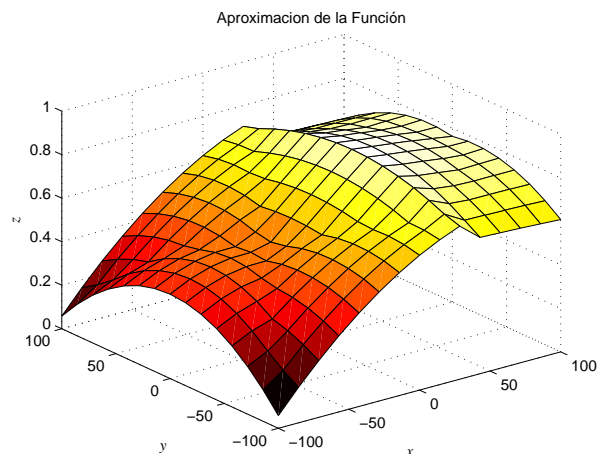


Figura 5.28: Función  $z = \frac{1}{2}(\sin(x)\cos(y)) + \eta(0, 0.01)$  aproximada en el rango [-100,100].

## Función 5

$$z = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta(0, 200)$$

La mejor aproximación de esta función muestreada (Figura 5.29(b)) con 441 puntos esta dada por el índice de correlación de 0.9885 cuando se modela con 6 y 6 conjuntos difusos por entrada. Aunque se podría tomar como aceptable el índice de 0.9792 con 2 conjuntos por entrada dando un mayor rendimiento en la reducción de reglas. La Figura 5.30 muestra el resultado para éste caso.

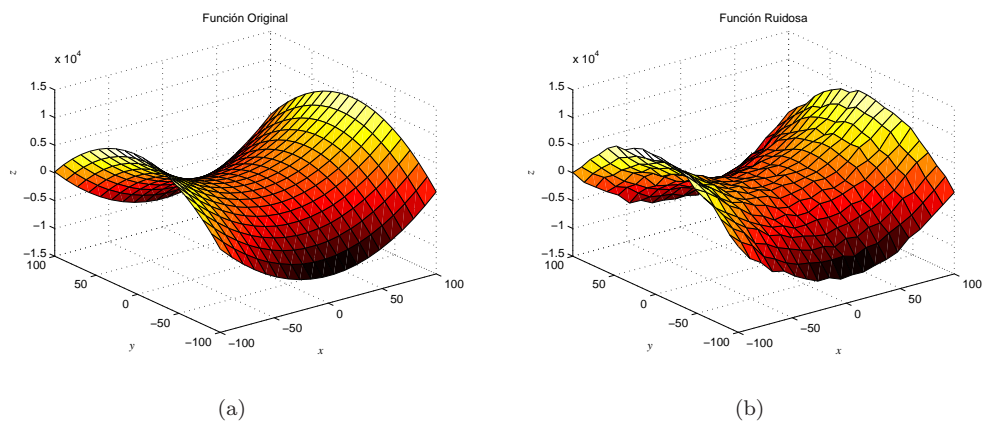


Figura 5.29: (a) Función original y (b) Evidencia numérica analizada en el rango [-100,100].

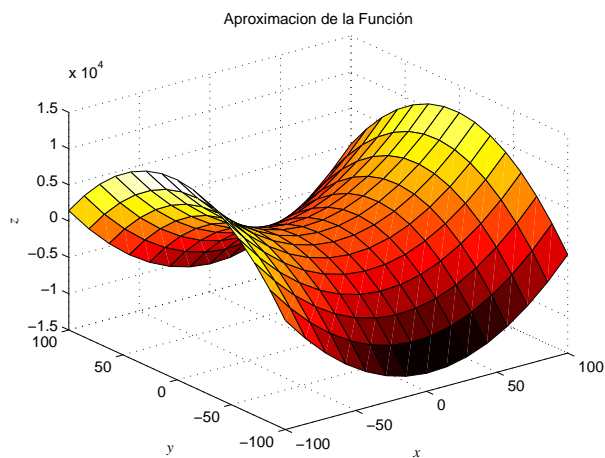


Figura 5.30: Función  $z$  aproximada en el rango [-100,100].

### 5.3. Identificación de modelos para tres variables de entrada

El principal propósito de nuestro trabajo consiste en incluir dentro del modelo múltiples variables de entrada. Siendo así, en esta etapa final del trabajo se incluye una tercer variable. Entonces se realiza una aproximación de las funciones con tres variables independientes, y se compara la variable dependiente de la función original con resultante para el modelo propuesto.

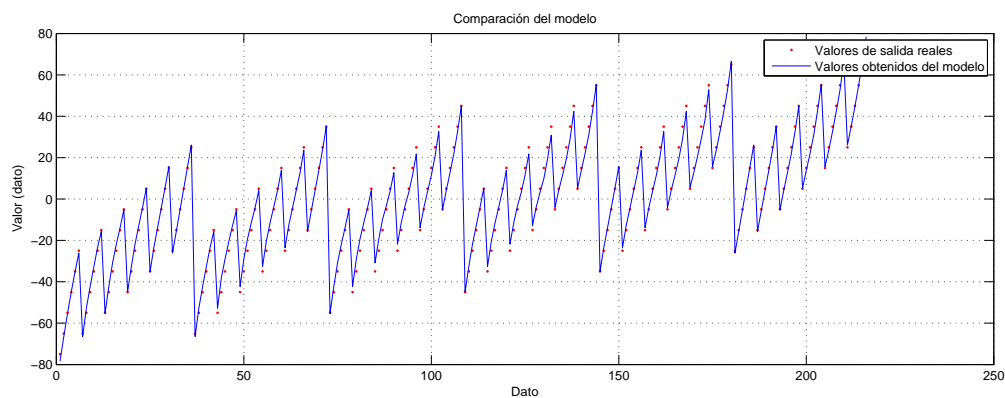
### 5.4. Resultados del Modelo para tres entradas

#### 5.4.1. Función 1

$$y = x_1 + x_2 + x_3$$

Esta función lineal es muy parecida a la Función 1 para dos variables, obteniéndose muy buenos resultados con pocos conjuntos difusos en cada una de las variables de entrada.

Cabe señalar que no se considerara ruido en estas funciones con tres variables de entrada.



**Figura 5.31:** Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 1.

El orden de los datos varía con el barrido de cada una de las variables de entrada.

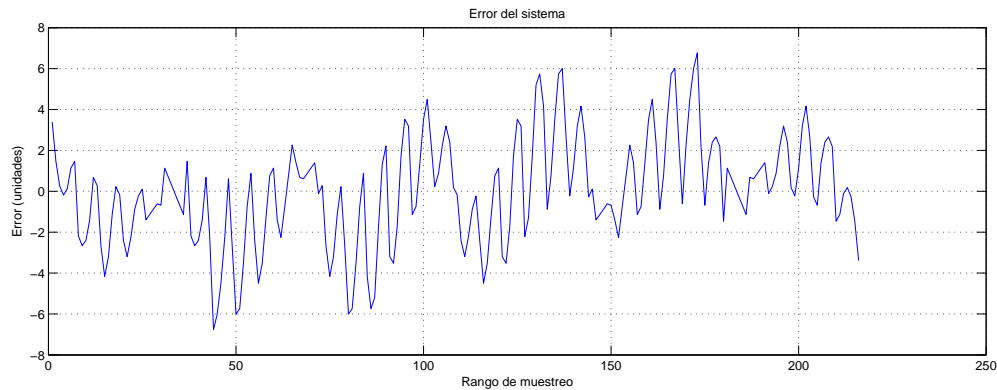


Figura 5.32: Error del modelo en la Función 1.

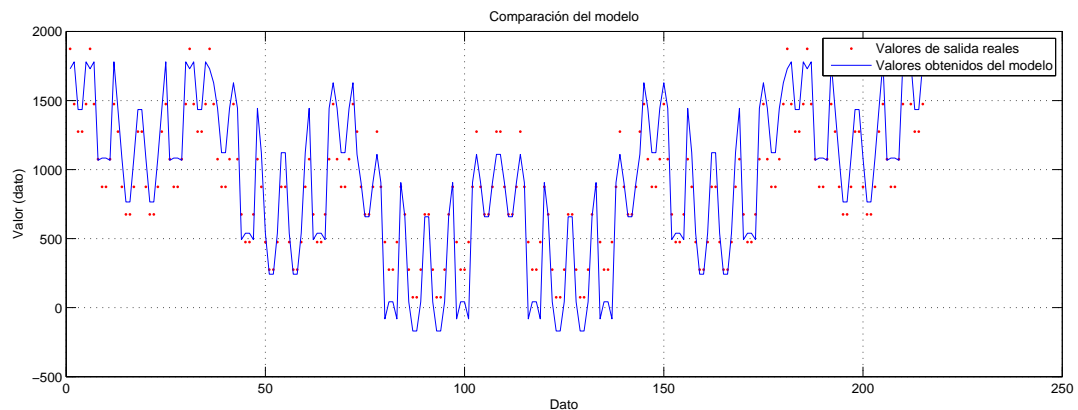
Primeramente la variable  $x$ , después  $y$  y al último  $z$ . Como era de esperarse, el modelo respondió bastante bien ante la función lineal, dando aproximaciones muy buenas con casi todas las combinaciones de los conjuntos difusos de cada entrada. Aún así, la mejor aproximación resultó de 2 conjuntos difusos por entrada obteniéndose un coeficiente de correlación de 0.9969. La gráfica de la comparación de resultados se muestra en la Figura 5.31, la cual muestra los valores puntuales de entrada contra los obtenidos por el modelo, estos últimos indicados en azul y continuamente. El barrido de la variable en  $x$  se observa en cambios de uno en uno, el barrido de  $y$  en intervalos de aproximadamente 15 muestras, el barrido de  $z$  se presenta cada 70 muestras aproximadamente. A su vez, en la Figura 5.32 se muestra el error que mantiene la función con dicha comparación, en donde se ve que el error máximo es de 6.7696 unidades.

Con esta función podemos notar que nuestro método resulta ser bastante bueno para estos casos dando un aproximación muy acertada.

### 5.4.2. Función 2

$$y = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Esta segunda función tiene como objetivo analizar una complejidad diferente del problema, ya que nuestro sistema tiene más dificultad al aproximar funciones más complejas, sin embargo, se obtiene una excelente respuesta, dando un índice de correlación de 0.9423, cuando hacemos la combinación de 8, 6 y 6 conjuntos difusos por entrada respectivamente. Un error máximo de 389.9281 unidades, este último valor no es muy grande si tomamos en cuenta que los valores resultantes de este tipo de función exponencial pueden ser enormes.



**Figura 5.33:** Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 2

La Figura 5.33 nos muestra la salida final de nuestro sistema para esta función contra la salida real de datos, pudiéndose observar que se tiene una similitud muy buena. También, en la Figura 5.34 podemos apreciar el comportamiento del error para esta función cuadrática.

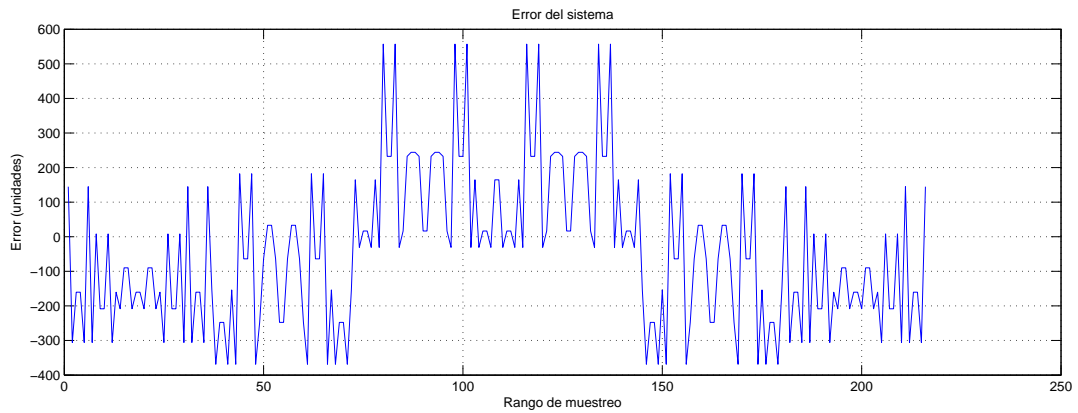


Figura 5.34: Error del modelo en la Función 2

### 5.4.3. Función 3

$$y = e^{x_1} + e^{x_2} + e^{x_3}$$

Analizando esta tercer función con comportamiento exponencial para cada variable de entrada, nos damos cuenta que nuestro sistema tiende a tener peor desempeño. Como se mostró en los resultados para funciones de dos variables, nuestro modelo responde con menos desempeño en las funciones con cambios abruptos. Se tiene así una similitud de 0.7816 como índice de correlación con la combinación de 8, 8 y 6 conjuntos difusos en las entradas respectivamente, 3.47 unidades como máximo error.

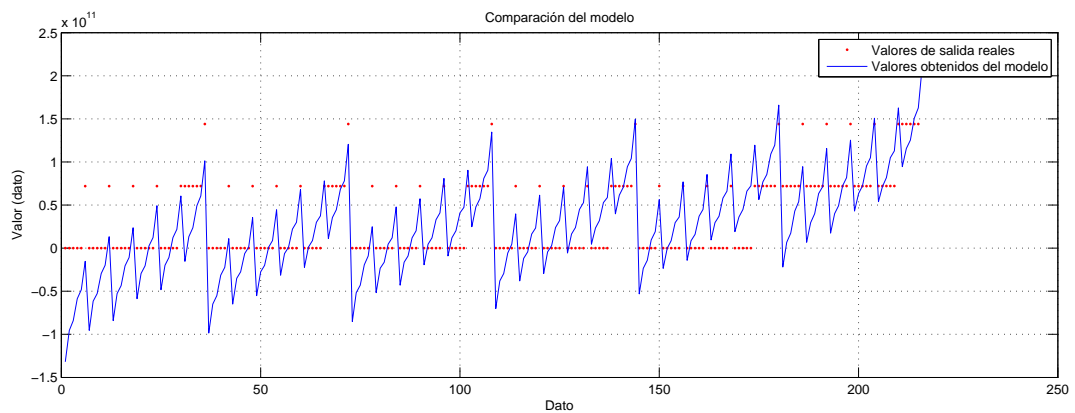
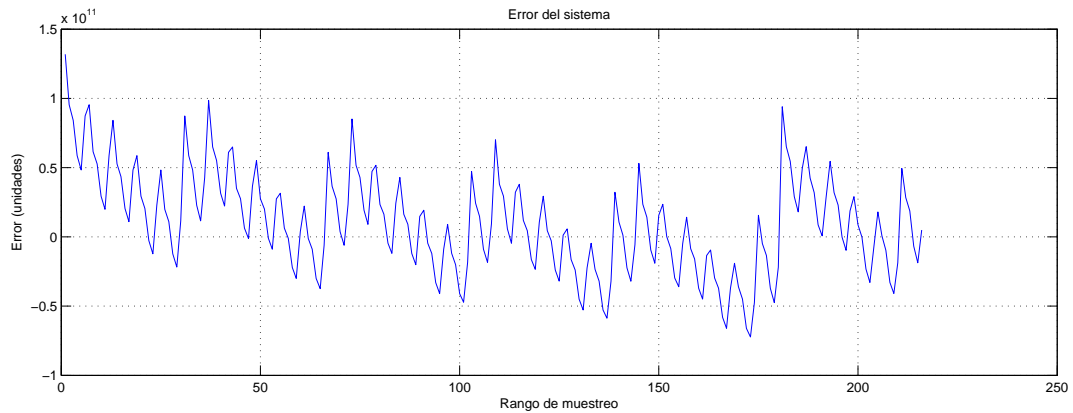


Figura 5.35: Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 3



**Figura 5.36:** Error del modelo en la Función 3

La comparación de nuestro resultado contra el de los datos reales es mostrado en la Figura 5.35, en esta ocasión no es tan fiable nuestro modelo ya que sí mantiene una diferencia notable entre dato y dato, el error para este caso se muestra en la Figura 5.36.

#### 5.4.4. Función 4

$$y = \sin(x_2) + \sin(x_2) + \sin(x_3)$$

Tratando con una función sinusoidal, se esperaría una identificación o aproximación más irregular debido a sus cambios periódicos, sin embargo el índice de correlación para medir la similitud se obtuvo de 0.9688 con la combinación de 3 conjuntos difusos por entrada, indicándonos un muy buen desempeño de nuestro modelo para este caso. El máximo error para este caso es de 0.2544 unidades.



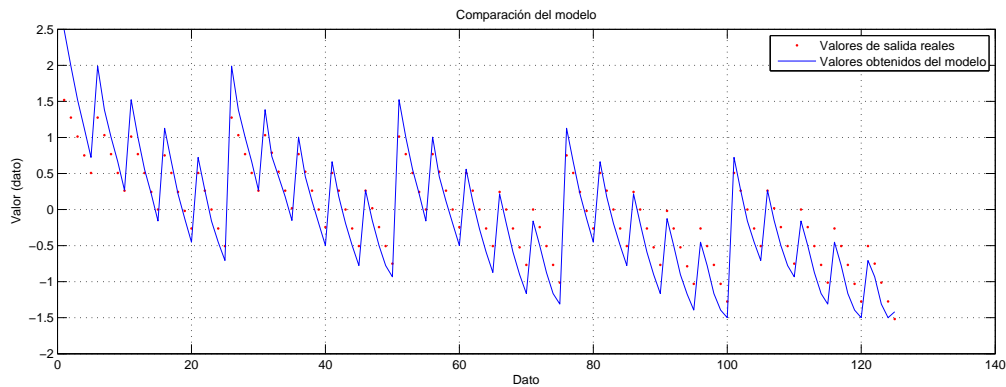


Figura 5.37: Comparación del modelo con los datos reales y los obtenidos en la Función 4

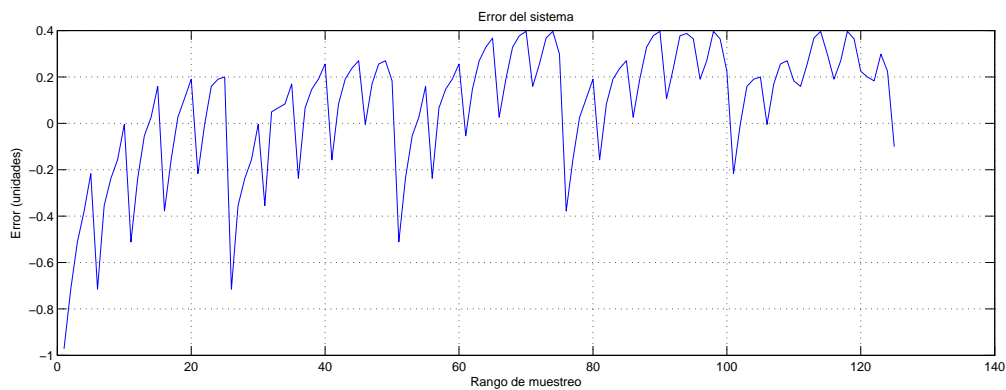


Figura 5.38: Error del modelo en la Función 4

Podemos observar la comparación entre los datos reales de la función contra los obtenidos en nuestro modelo para este caso en particular, en la Figura 5.37, notándose un excelente seguimiento de la respuesta obtenida sobre la original. En la Figura 5.38 apreciamos el error, que sigue el comportamiento de la función, y su aproximación.

## 5.5. Discusión de los resultados

La evaluación de los modelos se efectúa mediante la obtención del índice de correlación normalizado entre los datos de referencia y los datos obtenidos por el modelo, indicando el mejor desempeño y resultado al obtener índices cercanos a 1.

Los resultados han sido en su mayoría favorables en las pruebas, obteniéndose bue-

nas aproximaciones en cuanto a los modelos sintetizados. Los resultados señalan que el modelado actúa como un suavizador de funciones. También, algunos malos resultados se obtuvieron para evidencia numérica de funciones altamente no lineales.

Cabe señalar que las funciones trigonométricas empleadas en las pruebas, son evaluadas en los rango establecidos tomando estos valores como radianes.

---

## Capítulo 6

# Conclusiones

---

La lógica difusa nos permite tratar con problemas que presentan vaguedad y ambigüedad. Estos problemas son comunes en las tareas cotidianas, teniendo así que utilizarse metodologías adecuadas para su tratamiento. El entorno humano presenta características de vaguedad y ambigüedad, además de consistir de procesos involucrando múltiples variables.

En cuanto al desarrollo de aplicaciones, el modelado difuso es una forma de resolver problemas de los que no se tiene un modelo matemático; Cuando existe uno, no es conveniente emplear metodologías difusas.

El modelado difuso utilizando la aproximación de Takagi y Sugeno fue propuesta en 1985, teniendo como característica ser una buena opción para sistemas con múltiples variables. Una ventaja es que reduce el número de reglas a evaluar y como característica distintiva con respecto a otros modelos, es que los consecuentes de las reglas difusas son una combinación lineal de los antecedentes.

El modelado estudiado tiene dos formas distintas de identificación de premisas: creación de conjuntos igualmente distribuidos y creación de conjuntos por Fuzzy c-means. Siendo este último ocupado sólo en la identificación para una variable ofreciendo mejores resultados, mientras que la identificación por conjuntos igualmente distribuidos se utilizó en el resto del trabajo por simplicidad.

La identificación de consecuentes utilizada en el modelo es la propuesta por Takagi y Sugeno. En ella se obtiene una combinación lineal de las reglas. Esta identificación es fundamental en el modelado considerado.

La aproximación al modelo considerada trabaja con evidencia numérica obtenida utilizando funciones matemáticas, las cuales son evaluadas para obtener  $n$  número de datos, empleando funciones de una variable y funciones con múltiples variables sugeridas. La totalidad de los programas han sido desarrollados en Matlab ®.

La evaluación de los modelos se efectúa mediante la obtención del índice de correlación normalizado entre los datos de referencia y los datos obtenidos por el modelo, indicando el mejor desempeño y resultado al obtener índices cercanos a 1.

Los resultados han sido en su mayoría favorables en las pruebas, obteniéndose buenas aproximaciones en cuanto a los modelos sintetizados. Los resultados señalan que el modelado actúa como un suavizador de funciones. También, algunos malos resultados se obtuvieron para evidencia numérica de funciones altamente no lineales.

Así, el desarrollo del proyecto ha incluido la totalidad de aspectos necesarios para la identificación de modelos difusos tipo Takagi-Sugeno, esto a partir de evidencia numérica, en la que se ha considerado la aproximación de una, dos y tres variables de entrada.

Así mismo, múltiples pruebas muestran la utilidad de esta identificación para la aproximación de modelos presentando baja no linealidad.

Como tareas propuestas a futuro, sería deseable profundizar en el desarrollo de aplicaciones en tareas reales, empleando la metodología estudiada e implementada con lenguaje de programación en C. Todo esto, esperando como resultado una publicación sobre el trabajo.

# Bibliografía

---

- [1] J. C. Bezdek. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. Plenum Press, 1981.
- [2] M. A. Ramírez Chiu. *Una Aproximación Difusa a la Caracterización de Propiedades de Texturas Visuales*. Universidad de Guanajuato, 2004.
- [3] E. Cox. Fuzzy fundamentals. *IEEE Spectrum*, 29(10):58–61, 1992.
- [4] E. Cox. The great myths of fuzzy logic. *AI Expert*, 7(1):40–45, 1992.
- [5] E. Cox. Adaptive fuzzy systems. *IEEE Spectrum*, 30(2):27–31, 1993.
- [6] Y. Dote and S. J. Ovaska. Industrial applications of soft computing: A review. *Proceedings of the IEEE*, 89:1243–1265, 2001.
- [7] A. Perez García. *Servocontrol Visual de una cámara Activa usando técnicas Genodifusa*. Universidad de Guanajuato, 2002.
- [8] Horacio Rostro González. *Identificación de Modelos Difusos para la Aproximación de Imágenes*. Universidad de Guanajuato, 2007.
- [9] R.E. Sánchez. *Síntesis Automática de Modelos Difusos a partir de Evidencia Numérica*. Universidad de Guanajuato, 1997.
- [10] M. Spivak. *Calculus*. Reverté, S.A., second edition, 1996.
- [11] M. Sugeno and T. Yasukawa. A fuzzy-logic-based approach to qualitative modeling. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 1(1):7–31, 1993.
- [12] T. Takagi and M. Sugeno. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 15(1):116–132, 1985.

- 
- [13] N. Vadiieand and M. Jamshidi. The promising future of fuzzy logic. *IEEE Expert*, 5, 1994.
- [14] L. X. Wang. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and stability Analysis*. Prentice Hall, 1994.
- [15] P. Z. Wang, K. Tan, and S. Tan. Toward a framework of fuzzy dynamic systems. *IEEE Expert*, 9, 1994.
- [16] R.E. Sánchez Yáñez. *Entorno Integrado para Desarrollo de Modelos Difusos*. Universidad de Guanajuato, 1996.
- [17] R.E. Sánchez Yáñez, V. Ayala Ramírez, and J.C. Sánchez Vacío. Identificación de modelos difusos a partir de evidencia numérica. *Memorias XX Congreso Internacional de Ingeniería Electrónica(Electro 98) Chihuahua, México*, 1(1):517–522, 1998.
- [18] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8:338–353, 1965.