CINÉTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS; MOVIMIENTOS.

Javier Pajon Permuy.

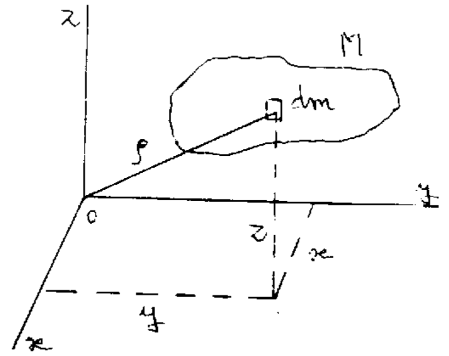
CINÉTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS; MOVIMIENTOS.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

TEMA XXIII

CINÉTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS; MOVIMIENTOS

23.1.- *Momentos de inercia.- Por extensión de los momentos de inercia estudiados en el plano, consideramos aquí los relativos a cuerpos reales, tridimensionales.*



$$Ixx = \int_M (y^2 + z^2) \cdot dm$$
$$Iyy = \int_M (x^2 + z^2) \cdot dm \qquad [1]$$
$$Izz = \int_M (x^2 + y^2) \cdot dm$$

Los momentos de inercia de la masa del cuerpo de la figura superior con respecto a los ejes x, y, z, se definen según las tres fórmulas arriba indicadas, Ixx, Iyy, Izz, respectivamente (en cada integral, considerando la distancia a los ejes, y desglosando según el teorema de Pitágoras, entran las dos distancias que no intervienen en la nomenclatura del eje). Evidentemente, son siempre positivos, y rigen las normas dadas en el plano respecto del cálculo general e integral en particular.

De forma análoga, se definen los productos de inercia por:

$$Ixy = \int_M x \cdot y \cdot dm \quad ; \quad Iyz = \int_M y \cdot z \cdot dm \quad ; \quad Izx = \int_M z \cdot x \cdot dm \qquad [2]$$

En estas últimas fórmulas intervienen en cada una las distancias entre el elemento de masa, dm, y los planos respectivos perpendiculares al del producto considerado (por ejemplo, plano xy, producto de inercia xy, distancias a los planos yz, xz). Como en el caso del plano, cuando el cuerpo posea simetría, el producto de inercia será nulo (por ejemplo si el plano xz es de simetría, Ixy = 0, Iyz = 0).

Se pueden aun definir otros momentos de inercia, no considerados en muchos textos: si x, y, z, son las coordenadas del elemento de masa, dm, definiremos (por extensión de lo dicho en el plano) un momento de inercia polar:

$$Io = \int_M \rho^2 \cdot dm = \int_M (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm \qquad [3]$$

Y más aun, los momentos de inercia con respecto a cada plano yz, xz, xy, por las distancias a dichos planos:

$$Ix = \int_M x^2 \cdot dm \quad ; \quad Iy = \int_M y^2 \cdot dm \quad ; \quad Iz = \int_M z^2 \cdot dm \qquad [4]$$

Entendemos la conveniencia de definir estos últimos por razones de cálculo. A veces es más fácil, por razones de simetría de un cuerpo, calcular el m.d.i. polar o respecto a los planos; entonces, observando las fórmulas, se puede escribir:

$$Ix + Iy = Izz \quad ; \quad Iy + Iz = Ixx \quad ; \quad Iz + Ix = Iyy \qquad [5]$$

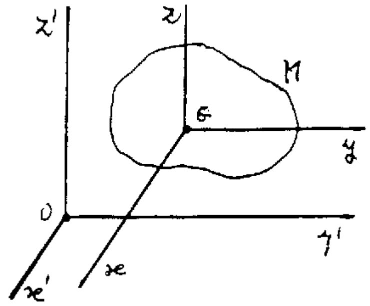
$$Io = Ix + Iy + Iz$$

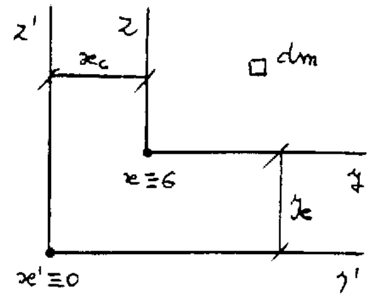
Es decir, el m.d.i. respecto a un eje es la suma de los m.d.i. respecto a los dos planos que concurren en él; y el m.d.i. polar es la suma de los tre m.d.i. que concurren en el polo. Piénsese en la esfera, por ejemplo, en donde es fácil calcular el m.d.i. polar, y a partir de aquí los de los tres planos y luego los de los ejes por simetría; o el caso de un cilindro o el de cualquier otro cuerpo que posea planos de simetría.

Igual que en el plano, se definen los radios de giro; por ejemplo, para el eje xx:

$$Ixx = rx^2 \cdot M = \int_M (y^2 + z^2) \cdot dm \quad ; \quad rx = \sqrt{Ixx/M} \qquad [6]$$

23.2.- Teoremas de Steiner.- Lo mismo que en el plano, habitualmente se calculan todos los m.d.i. respectoa ejes que pasan por el c.d.g. del cuerpo, G; y se trata aquí de, conocidos todos los m.d.i., calcular los relativos a un sistema de ejes trasladados paralelamente respecto de los que pasan por G; el cálculo es similar al plano:



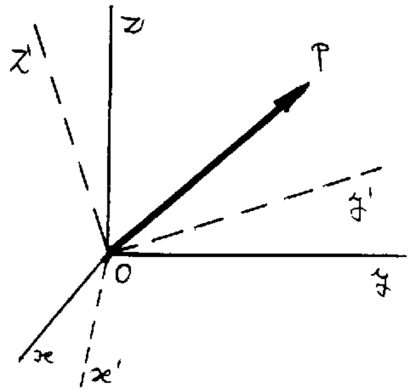


$$Ix'x' = \int_M (y'^2 + z'^2)\cdot dm = \int_M [(y + yc)^2 + (z + zc)^2]\cdot dm =$$
$$= \int_M (y^2 + z^2)\cdot dm + (yc^2 + xc^2)\cdot M + 2\cdot yc\cdot\int_M y\cdot dm + 2\cdot zc\cdot\int_M z\cdot dm =$$
$$= Ixx + (yc^2 + zc^2)\cdot M$$

habiéndose anulado las dos últimas integrales por ser los momentos estáticos respecto al c.d.g., que son nulos. Por extensión, y con el mismo procedimiento de cálculo, podemos escribir:

$$Ix'x' = Ixx + (yc^2 + zc^2)\cdot M \qquad Ix'y' = Ixy + xc\cdot yc\cdot M$$
$$Iy'y' = Iyy + (xc^2 + zc^2)\cdot M \qquad Iy'z' = Iyz + yc\cdot zc\cdot M \qquad [7]$$
$$Iz'z' = Izz + (xc^2 + yc^2)\cdot M \qquad Iz'x' = Izx + zc\cdot xc\cdot M$$

23.3.- *Teoremas relativos a la rotación de ejes.- Por su complicación demostrativa, no incluimos tales demostraciones, dando solo los resultados. Se trata de, dado un triedro 0xyz, que gira con el origen 0 fijo hasta una nueva posición 0x'y'z', calcular los m.d.i. respecto a estos últimos ejes en función de los primeros.*



Se definen los cosenos directores de los nuevos ejes respecto de los antiguos:

$$lx'x = \vec{i'}\cdot\vec{i} \quad ; \quad lx'y = \vec{i'}\cdot\vec{j} \quad ;$$
$$lx'z = \vec{i'}\cdot\vec{k} \quad ; \quad etc.;$$
$$\vec{i'} = lx'x\cdot\vec{i} + lx'y\cdot\vec{j} + lx'z\cdot\vec{k}$$
$$\vec{j'} = ly'x\cdot\vec{i} + ly'y\cdot\vec{j} + ly'z\cdot\vec{k}$$
$$\vec{k'} = lz'x\cdot\vec{i} + lz'y\cdot\vec{j} + lz'z\cdot\vec{k}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} lx'x & lx'y & lx'z \\ ly'x & ly'y & ly'z \\ lz'x & lz'y & lz'z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \qquad [8]$$

Por otra parte, se recuerda que (teoría vectorial):

$$lx'x^2 + lx'y^2 + lx'z^2 = 1 \text{ , etc..}$$

Como en el estudio del plano, para un origen fijo, 0, hay un número infinito de ejes coordenados rectangulares que pueden escogerse; pero hay un sistema de ejes para cada punto, denominado ejes principales, tales que:

$$Ixy = Iyz = Izx = 0$$

Escribimos los nuevos momentos de inercia en el caso general y en el caso de que x, y, z, fueran principales de inercia; y escribimos solo una fórmula de cada caso, dejando al alumno que complete las restantes; las fórmulas finales condensadas se refieren a la teoría de tensores, para el que la conozca:

1) <u>*caso general*</u>

$$Ix'x' = lx'x^2 \cdot Ixx + lx'y^2 \cdot Iyy + lx'z^2 \cdot Izz - 2 \cdot lx'x \cdot lx'y \cdot Ixy -$$

$$- 2 \cdot lx'x \cdot lx'z \cdot Ixz - 2 \cdot lx'y \cdot lx'z \cdot Iyz = \sum_j \sum_i lx'i \cdot lx'j \cdot Iij$$

$$Ix'y' = - lx'x \cdot ly'x \cdot Ixx - lx'y \cdot ly'y \cdot Iyy - lx'z \cdot ly'z \cdot Izz +$$

$$+ (lx'x \cdot ly'y + lx'y \cdot ly'x) \cdot Ixy + (lx'y \cdot ly'z + lx'z \cdot ly'y) \cdot Iyz +$$

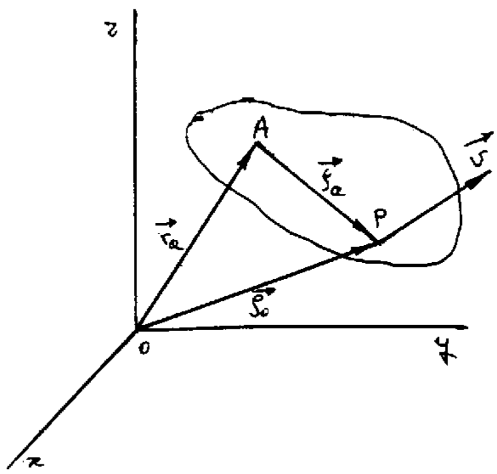
$$+ (lx'z \cdot ly'x + lx'x \cdot ly'z) \cdot Izx = - \sum_j \sum_i lx'i \cdot ly'j \cdot Iij \qquad [9]$$

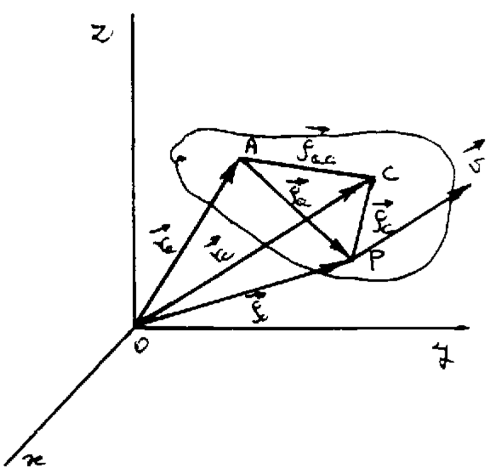
2) <u>*ejes principales de inercia*</u>

$$Ix'x' = lx'x^2 \cdot Ixx + lx'y^2 \cdot Iyy + lx'z^2 \cdot Izz$$

$$Ix'y' = - lx'x \cdot ly'x \cdot Ixx - lx'y \cdot ly'y \cdot Iyy - lx'z \cdot ly'z \cdot Izz \qquad [10]$$

23.4.- *__Momento angular de un cuerpo rígido__.- El cálculo del momento angular de un cuerpo rígido se lleva a cabo partiendo del mismo concepto que en el sistema de partículas, ya estudiado, sin más que sustituir la sumatoria por la integral extendida a todo el cuerpo.*





De la figura de la izquierda, considerando una masa, dm, en el punto P, que se mueve con velocidad $\vec{v}$, escribimos la expresión del momento angular:

$$\vec{Ha} = \int_M \vec{pa} \wedge dm\cdot\vec{v} = \int_M (\vec{pa}\wedge\vec{v})\cdot dm$$

pero, en la rotación alrededor de A, tenemos: $\vec{v} = \dot{\vec{ra}} + \vec{w}\wedge\vec{pa}$

$$\vec{Ha} = \int_M \vec{pa}\wedge(\dot{\vec{ra}} + \vec{w}\wedge\vec{pa})\cdot dm = \int_M (\vec{pa}\wedge\dot{\vec{ra}})\cdot dm + \int_M \vec{pa}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{pa})\cdot dm =$$

$$= \left[\int_M \vec{pa}\cdot dm\right]\wedge\dot{\vec{ra}} + \int_M \vec{pa}\wedge(\vec{w}\wedge\vec{pa})\cdot dm$$

El último paso (primera integral de la última igualdad) se debe al hecho de que $\dot{ra}$ es la misma, independiente del punto P considerado.

Estudiemos dos casos diferentes para el punto A, que son los más utilizados en la práctica:

1) Si A es un punto fijo, $\vec{ra} = 0$, que trasladamos al 0, centro del sistema ($\vec{w}$ rotación alrededor de 0):

$$\vec{Ho} = \int_M \vec{po} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{po}) \cdot dm$$

2) Si A es el centro de masas, C; entonces $\int pc \cdot dm = 0$ ($\vec{w}$ rotación alrededor de C):

$$\vec{Hc} = \int_M \vec{pc} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{pc}) \cdot dm$$

En ambos casos, punto fijo o centro de masas, podemos escribir genéricamente (recordando lo que cada caso comporta):

$$\vec{H} = \int \vec{p} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{p}) \cdot dm \qquad [11]$$

y escribiendo el carácter vectorial de cada componente:

$$\vec{H} = Hx \cdot \vec{i} + Hy \cdot \vec{j} + Hz \cdot \vec{k} \quad ; \quad \vec{p} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

$$\vec{w} = wx \cdot \vec{i} + wy \cdot \vec{j} + wz \cdot \vec{k}$$

$$\vec{p} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{p}) = \vec{p} \wedge \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ wx & wy & wz \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ wy \cdot z - wz \cdot y & wz \cdot x - wx \cdot z & wx \cdot y - wy \cdot x \end{vmatrix} =$$

$$= [(y^2 + z^2) \cdot wx - x \cdot y \cdot wy - x \cdot z \cdot wz] \cdot \vec{i} +$$
$$+ [- x \cdot y \cdot wx + (z^2 + x^2) \cdot wy - y \cdot z \cdot wz] \cdot \vec{j} +$$
$$+ [- z \cdot x \cdot wx - y \cdot z \cdot wy + (x^2 + y^2) \cdot wz] \cdot \vec{k}$$

Igualando, de la anterior expresión, cada parte con Hx, Hy, Hz *respectivamente, y ciñéndonos solo a la primera (las demás se resuelven análogamente):*

$$Hx = wx\cdot\int (y^2 + z^2)\cdot dm - wy\cdot\int x\cdot y\cdot dm - wz\cdot\int x\cdot z\cdot dm =$$

$$\begin{aligned} &= Ixx\cdot wx - Ixy\cdot wy - Ixz\cdot wz = Hx \\ &- Iyx\cdot wx + Iyy\cdot wy - Iyz\cdot wz = Hy \qquad [12] \\ &- Izx\cdot wx - Izy\cdot wy + Izz\cdot wz = Hz \end{aligned}$$

que es lo mismo que la ecuación metricial:

$$\begin{bmatrix} Hx \\ Hy \\ Hz \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ixx & -Ixy & -Ixz \\ -Iyx & Iyy & -Iyz \\ -Izx & -Izy & Izz \end{bmatrix}}_{\text{tensor de inercia}} \cdot \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \end{bmatrix} \qquad [13]$$

Si los ejes son principales de inercia, queda:

$$\begin{aligned} Hx &= Ixx\cdot wx \;; \\ Hy &= Iyy\cdot wy \;; \\ Hz &= Izz\cdot wz \;; \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} Hx \\ Hy \\ Hz \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} Ixx & 0 & 0 \\ 0 & Iyy & 0 \\ 0 & 0 & Izz \end{bmatrix}}_{\text{tensor de inercia}} \cdot \begin{bmatrix} wx \\ wy \\ wz \end{bmatrix} \qquad [14]$$

23.5.- *<u>Eucaciones de movimiento de un cuerpo rígido</u>.- Para el centro de masas, por lo que se estudió en el sistema de partículas, y sustituyendo las sumatorias por integrales, podemos escribir:*

$$\frac{d(m\cdot v)}{dt} = F \qquad ; \qquad \text{es decir:}$$

$$Fx = m\cdot \ddot{x}c \qquad ; \qquad Fy = m\cdot \ddot{y}c \qquad ; \qquad F = m\cdot \ddot{z}c \qquad [15]$$

y por otra parte, según el punto que se considere, fijo 0, centro de masas C:

$$\vec{Mc} = \vec{Hc}$$
$$\vec{Mo} = \vec{Ho} \qquad [16]$$

Tratemos de estudiar estas dos últimas ecuaciones; pero, lo mismo que en la cinemática de los movimientos relativos, tengamos en cuenta que los ejes están girando y, por lo tanto, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, son variables en posicón; admitamos, para no complicar más el cálculo, que el sistema está ligado al cuerpo, posee la misma rotación que el cuerpo:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{d}{dt}(Hx\cdot\vec{i} + Hy\cdot\vec{j} + Hz\cdot\vec{k}) = \dot{H}x\cdot\vec{i} + \dot{H}y\cdot\vec{j} + \dot{H}x\cdot\vec{k} +$$

$$+ Hx\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + Hy\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + Hz\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} \qquad ;$$

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{i} = (wx\cdot\vec{i} + Wy\cdot\vec{j} + wz\cdot\vec{k})\wedge\vec{i} = -\,wy\cdot\vec{k} + wz\cdot\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{j} = (wx\cdot\vec{i} + Wy\cdot\vec{j} + wz\cdot\vec{k})\wedge\vec{j} = wx\cdot\vec{k} - wz\cdot\vec{i}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{w}\wedge\vec{k} = (wx\cdot\vec{i} + Wy\cdot\vec{j} + wz\cdot\vec{k})\wedge\vec{k} = -\,wx\cdot\vec{j} + wy\cdot\vec{i}$$

Sustituyendo estas tres últimas expresiones en la anterior de $\vec{M}$ y teniendo en cuenta las [12], que nos daban los valores de Hx, Hy, Hz, así como sus correspondientes derivadas, $\dot{H}x$, $\dot{H}y$, $\dot{H}z$, e igualando cada parte vectorial, se obtiene finalmente:

$$Mx = \dot{H}x - Hy\cdot wz + Hz\cdot wy =$$

$$= Ixx\cdot\dot{w}x - Ixy\cdot\dot{w}y - Ixz\cdot\dot{w}z + Iyx\cdot wx\cdot wz - Iyy\cdot wy\cdot wz +$$

$$+ Iyz\cdot wz^2 - Izx\cdot wx\cdot wy - Izy\cdot wy^2 + Izz\cdot wy\cdot wz \qquad [17]$$

Las demás se obtienen de forma similar; ciñéndonos al caso de ejes principales de inercia (los cuerpos con ejes de simetría) se simplifica (escribiendo ya Ixx = Ix; Iyy = Iy; Izz = Iz):

$$\begin{aligned} Mx &= Ix\cdot\dot{w}x - (Iy - Iz)\cdot wy\cdot wz \\ My &= Iy\cdot\dot{w}y - (Iz - Ix)\cdot wx\cdot wz \\ Mz &= Iz\cdot\dot{w}z - (Ix - Iy)\cdot wx\cdot wy \end{aligned} \qquad [18]$$

Las ecuaciones [15] y [18] resuelven los distintos movimientos, y ya solo nos resta aplicarlas a los casos más comunes, similares a los de cinemática.

23.5.1.-*Traslación.- En la traslación no existe rotación alguna; además, no hay ningún punto fijo y se debe tomar momentos respecto del centro de masas; queda, pues:*

1º) traslación tridimensional:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Sigma\, Fx = m\cdot\ddot{x}c & \Sigma(Mc)x = 0 \\ \Sigma\, Fy = m\cdot\ddot{y}c & \Sigma(Mc)y = 0 \\ \Sigma\, Fz = m\cdot\ddot{z}c & \Sigma(Mc)z = 0 \end{array}} \qquad [19]$$

2º) traslación plana:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \Sigma\, Fx = m\cdot\ddot{x}c & \Sigma(Mc)z = 0 \\ \Sigma\, Fy = m\cdot\ddot{y}c & \end{array}} \qquad [20]$$

3º) traslación rectilínea:

$$\boxed{\Sigma\, Fx = m\cdot\ddot{x}c \qquad \Sigma(Mc)z = 0} \qquad [21]$$

23.5.2.- *Rotación alrededor de un eje fijo*.- *Si tomamos el eje z como eje de rotación, $Wx = Wy = 0$; se debe tomar momentos respecto de cualquier punto fijo, 0, del eje; queda ahora:*

1º) caso general:

$$\begin{array}{ll} \Sigma\, Fx = m\cdot \ddot{x}c & \Sigma(Mo)x = Iyz\cdot wz^2 - Ixz\cdot \dot{w}z \\ \Sigma\, Fy = m\cdot \ddot{y}c & \Sigma(Mo)y = -\,Iyz\cdot \dot{w}z - Ixz\cdot wz^2 \\ \Sigma\, Fz = 0 & \Sigma(Mo)z = Izz\cdot \dot{w}z \end{array} \qquad [22]$$

2º) cuerpo con plano de simetría perpendicular al eje z:

$$\begin{array}{ll} \Sigma\, Fx = m\cdot \ddot{x}c & \Sigma(Mo)z = Izz\cdot \dot{w}z = I\cdot \alpha \\ \Sigma\, Fy = m\cdot \ddot{y}c & \end{array} \qquad [23]$$

23.5.3.- *Movimiento plano*.- *Tomando el plano xy como plano del movimiento, no puede existir sino la rotación wz; resultan, por tanto, las mismas fórmulas anteriores, pero, puesto que no hay ningún punto fijo, se debe tomar momentos respecto del centro de masas:*

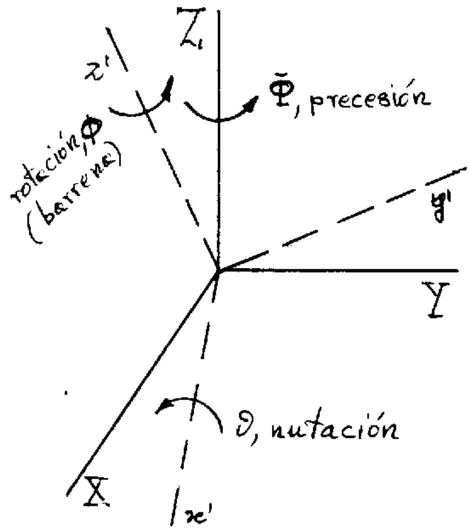
1º) caso general:

$$\begin{array}{ll} \Sigma\, Fx = m\cdot \ddot{x}c & \Sigma(Mc)x = Iyz\cdot wz^2 - Ixz\cdot \dot{w}z \\ \Sigma\, Fy = m\cdot \ddot{y}c & \Sigma(Mc)y = -\,Iyz\cdot \dot{w}z - Ixz\cdot wz^2 \\ \Sigma\, Fz = 0 & \Sigma(Mc)z = Izz\cdot \dot{w}z \end{array} \qquad [24]$$

1º) cuerpo con plano de simetría paralelo al plano xy:

$$\begin{array}{ll} \Sigma\, Fx = m\cdot \ddot{x}c & \Sigma(Mc)z = Izz\cdot \dot{w}z = I\cdot \alpha \\ \Sigma\, Fy = m\cdot \ddot{y}c & \end{array} \qquad [25]$$

23.5.4.- *<u>Movimiento alrededor de un punto fijo</u>.- Por su complicación de cálculo indicamos solamente el resultado final; remitimos al alumno a los "ángulos de Euler", estudiados en cinemática, que debe vovler a recordar.*



$$w_{x'} = \dot{\Phi}\cdot sen\theta\cdot sen\phi + \dot{\theta}\cdot cos\phi$$

$$w_{y'} = \dot{\Phi}\cdot sen\theta\cdot cos\phi - \dot{\theta}\cdot sen\phi$$

$$w_{z'} = \dot{\Phi}\cdot cos\theta + \dot{\phi} \qquad [26]$$

Recordemos únicamente que X, Y, Z, son los ejes fijos, mientras que x', y', z', son los ejes fijos al cuerpo. Trataremos solamente el caso de ejes principales de inercia; y aun más, dado que en la ingeniería práctica los movimientos de este tipo generalmente lo afectúan cuerpos de revolución, que consideraremos el eje z, entonces Ix = Iy, y escribiremos simplemente I; con todas estas premisas, las ecuaciones a aplicar son:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma F_x = m\cdot \ddot{x}_c \quad ; \quad \Sigma F_y = m\cdot \ddot{y}_c \quad ; \quad \Sigma F_z = m\cdot \ddot{z}_c \\ \Sigma (M_o)_x = I\cdot(\ddot{\theta} - \dot{\Phi}^2\cdot sen\theta\cdot cos\theta) + I_z\cdot\dot{\Phi}\cdot sen\theta\cdot(\dot{\Phi}\cdot cos\theta + \dot{\phi}) \\ \Sigma (M_o)_y = I\cdot(\ddot{\Phi}\cdot sen\theta + 2\cdot\dot{\Phi}\cdot\dot{\theta}\cdot cos\theta) - I_z\cdot\dot{\theta}\cdot(\dot{\Phi}\cdot cos\theta + \dot{\phi}) \\ \Sigma (M_o)_z = I_z\cdot(\ddot{\phi} + \ddot{\Phi}\cdot cos\theta - \dot{\Phi}\cdot\dot{\theta}\cdot sen\theta) \end{array}} \qquad [27]$$

Ya indicamos al alumnos la dificultad de resolver problemas de este tipo, por lo que no insistimos más.

23.5.5.- *Movimiento general.- Desgraciadamente, éste es el caso más complicado y no resta sino recurrir a las ecuaciones generales. Las ecuaciones [15] siempre son necesarias; y respecto a las [16], podrán utilizarse en la forma general, [17], si los ejes no son principales de inercia, o en la forma simplificada, [18], si los ejes sí son principales de inercia. Y decimos también, como en el movimiento con un punto fijo, la dificultad que encierran estos problemas.*

23.6.- *Conclusión.- Como consejos prácticos para la resolución de los problemas, indicamos al alumno el camino que debe seguir:*

1º) Ante todo, analizar el tipo de movimiento, para saber cuál de los casos anteriores debe seguir (traslación, movimiento plano, etc).

2º) Estudiar el diagrama de cuerpo libre, de la misma forma que en la Estática.

3º) Aplicar a dicho diagrama de cuerpo libre las ecuaciones del movimiento que procedan, según el primer punto. Analizar siempre si es respecto al centro de masas, C, o respecto a un punto fijo, 0, o bien respecto a un punto cualquiera (en los casos más difíciles), respecto de dónde se debe tomar momentos.

4º) Si fuera necesario, aplicar relaciones cinemáticas, si es que las hay.

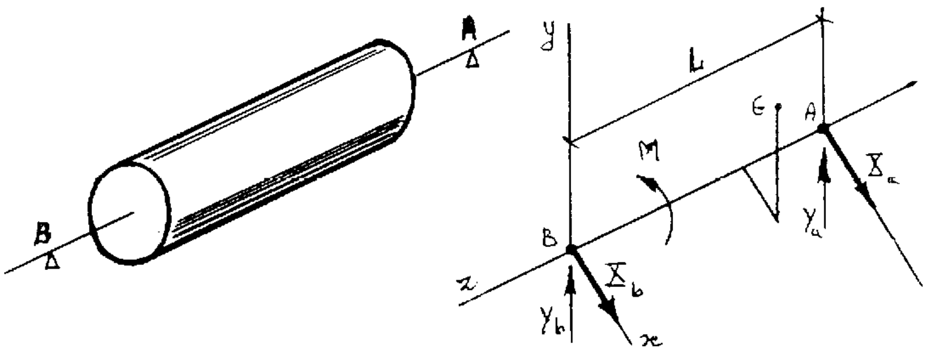
5º) Aplicar, finalmente, las ecuaciones de rozamiento posible. Respecto del rozamiento conviene hacer otra aclaración: puesto que se trata de dinámica, $\mu \cdot N$ puede tener cualquier valor, tal que $\mu \cdot N \leq N$.

Se resuelva el problema con los consejos del 1º) al 5º); y si resulta al final $\mu \cdot N > N$, como ésto es imposible, se toma como fuerza de rozamiento $fr = \mu \cdot N$; con este valor se vuelve a resolver el mismo problema, que dará la solución correcta final.

TEMA XXIV

CINÉTICA DE LOS CUERPOS RÍGIDOS; TRABAJO Y ENERGÍA, IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

24.1.- *Equilibrado estático y dinámico*.- Cuando un órgano de máquina denominado rotor, gira a lo largo de un eje z, apoyado en dos puntos del eje, y el c.d.g. del conjunto está desplazado de dicho eje z, se producen importantes interferencias, que vamos a analizar.



Supongamos en las figuras superiores que el rotor gira con una velocidad angular w y una aceleración angular α; que su masa, m, tiene su c.d.g. desplazado hasta G, de coordenadas xc, yc y que la longitud entre apoyos es L; en estas condiciones la excentricidad de G respecto al eje vale $\vec{\rho} = xc\cdot\vec{i} + yc\cdot\vec{j}$ Aplicando las ecuaciones cinemáticas y las propias de la cinética, ecuaciones [22] del capítulo anterior, podemos escribir:

$$\vec{w} = w\cdot\vec{k} \qquad ; \qquad \dot{\vec{w}} = \alpha\cdot\vec{k}$$

$$\vec{ac} = \dot{\vec{w}}\wedge\vec{\rho} + \vec{w}\wedge\vec{w}\wedge\vec{\rho} = \alpha\cdot\vec{k}\wedge(xc\cdot\vec{i} + yc\cdot\vec{j}) +$$

$$+ w\cdot\vec{k}\wedge[w\cdot\vec{k}\wedge(xc\cdot\vec{i} + yc\cdot\vec{j})] =$$

$$= \alpha\cdot xc\cdot\vec{j} - \alpha\cdot yc\cdot\vec{i} - w^2\cdot xc\cdot\vec{i} - w^2\cdot yc\cdot\vec{j} =$$

$$= (- \alpha \cdot yc - w^2 \cdot xc) \cdot \vec{i} + (\alpha \cdot xc - w^2 \cdot yc) \cdot \vec{j} = \ddot{xc} \cdot \vec{i} + \ddot{yc} \cdot \vec{j}$$

siendo: $\ddot{xc} = - \alpha \cdot yc - w^2 \cdot xc$, $\ddot{yc} = \alpha \cdot xc - w^2 \cdot yc$

$$\Sigma\ Fx = m \cdot xc \quad ; \quad Xa + Xb = m \cdot (- \alpha \cdot yc - w^2 \cdot xc)$$

$$\Sigma\ Fy = m \cdot yc \quad ; \quad Ya + Yb = m \cdot (+ \alpha \cdot xc - w^2 \cdot yc)$$

$$\Sigma\ Mx = + Iyz \cdot w^2 - Izx \cdot \alpha \quad ; \quad Ya \cdot L = + Iyz \cdot w^2 - Izx \cdot \alpha$$

$$Ya = \frac{Iyz \cdot w^2 - Izx \cdot \alpha}{L}$$

$$\Sigma\ My = - Iyz \cdot \alpha - Izx \cdot w^2 \quad ; \quad - Xa \cdot L = - Iyz \cdot \alpha - Izx \cdot w^2$$

$$Xa = \frac{Iyz \cdot \alpha + Izx \cdot w^2}{L}$$

$$\Sigma\ Mz = Iz \cdot \alpha \quad ; \quad M = I \cdot \alpha$$

Se ve, resolviendo las reacciones Xa, Ya, Xb, Yb, que todas son función de w y α, aumentando mucho con valores altos de la frecuencia (incluso Ya, Xa varían aun cuando $xc = yc = 0$, si $Iyz \neq Izx$); además, puesto que los ejes x,y giran con el rotor, dichas reacciones giran también, produciendo vibraciones en la estructura soporte, que pueden llegar hasta la rotura o colapso del sistema.

El equilibrado dinámico consiste precisamente en colocar masas adicionales (calculadas hoy día con aparatos especiales), de tal modo que logren llevar el centro de gravedad al eje y conseguir que $Iyz = Izx = 0$; una vez que el rotor llega a su régimen de velocidad, w = constante, $\alpha = 0$; y todas las reacciones citadas son nulas, quedando únicamente las reacciones estáticas del peso del conjunto (fijas, según el eje y vertical).