

MÉTODO DE CROSS: PARTICULARIDADES.

MÉTODO DE CROSS: PARTICULARIDADES.

Javier Pajon Permuy.

Cita:

Javier Pajon Permuy (1997). *MÉTODO DE CROSS: PARTICULARIDADES*.
MÉTODO DE CROSS: PARTICULARIDADES.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/6>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/pvp3/Ud8>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.

MÉTODO DE CROSS: PARTICULARIDADES.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

Cita: Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio (1997). *MÉTODO DE CROSS: PARTICULARIDADES*. CONTINUACIÓN DEL MÉTODO DE CROSS, PARTE III: TEORÍA DE ARCOS Y MÉTODO DE CROSS APLICADOS AL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/5>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.

Para ver una copia de esta licencia, visite

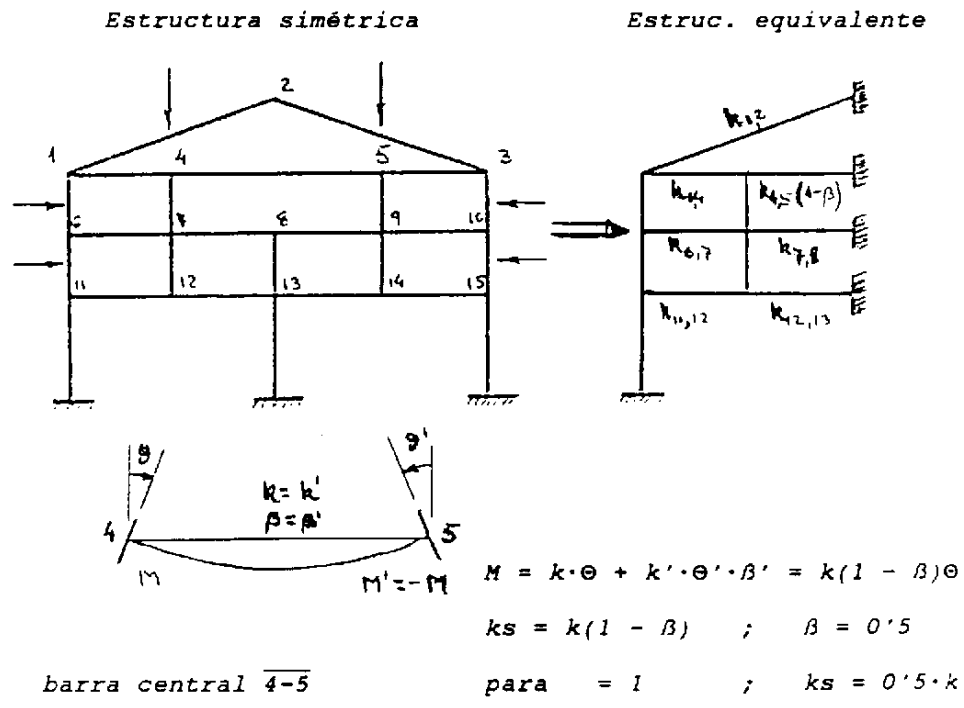
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <http://www.aacademica.org>.

2.13.- Simetría y antimetría.- Cuando una estructura es simétrica o tiene acciones exteriores simétricas o antimétricas, puede usarse de simplificaciones importantes en el cálculo, reduciendo las operaciones a la mitad de la estructura.

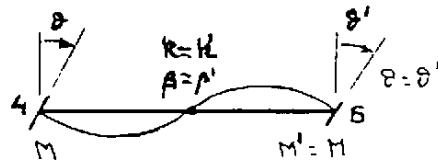
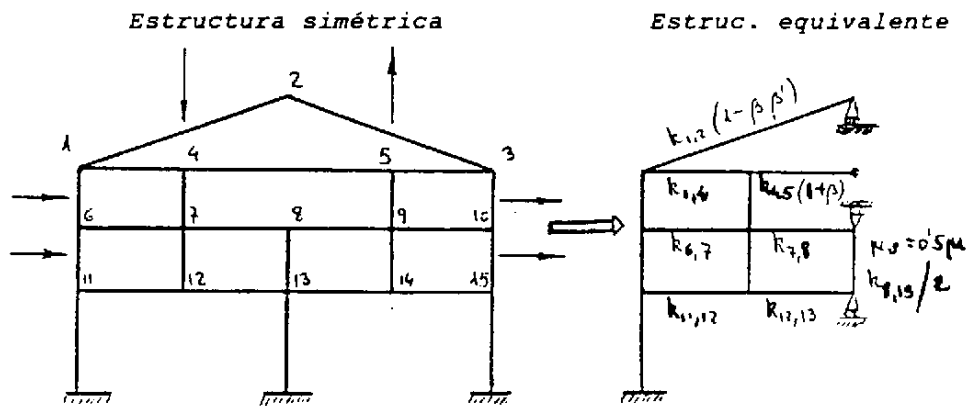
En una estructura simétrica con acciones exteriores simétricas los momentos de empotramiento del estado fundamental serán simétricos; y lo mismo ocurrirá con los momentos de desplazamiento transversal, ya que las posibles traslaciones de los nudos en los estados paramétricos han de ser también simétricos.

Lo cual significa que, tanto en el estado fundamental como en los paramétricos, los momentos desequilibrados iniciales son simétricos. Si, para no romper el equilibrio simétrico en los sucesivos ciclos, se libera cada vez un nudo y su simétrico, aplicando pares simétricos, M y $-M$, el efecto va a ser definir una rigidez global del proceso, rigidez virtual de simetría, k_s , de las barras que atraviesan el eje de simetría.



Está claro que, por las mismas razones de simetría, los nudos sobre el eje no giran. las barras como la 1-2 tienen sus extremos empotrados en el eje, no variando sus rigideces (pero pudiendo tener desplazamientos a lo largo de dicho eje). Las barras sobre el eje, como la 8-13, no se deforman y se puede suponer su rigidez infinita, no considerándose en la distribución de momentos.

Por analogía, en una estructura simétrica con acciones exteriores asimétricas los momentos de empotramientos del estado fundamental serán asimétricos; y lo mismo ocurrirá con los de desplazamiento transversal, al ser las traslaciones asimétricas. Al liberar ambos nudos en una barra que atraviese el eje de simetría hemos de aplicar pares asimétricos, M y $M' = M$; y se definirá otra rigidez global, rigidez virtual de antimetría, k_a .



$$M = k \cdot \theta + k' \cdot \theta' \cdot \beta' = k(1 + \beta)\theta$$

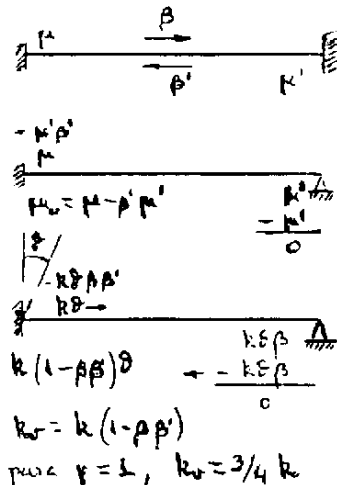
$$k_a = k(1 + \beta) \quad ; \quad \beta = 0.5$$

barra central $\overline{4-5}$

$$\text{para } = 1 \quad ; \quad k_s = 1.5 \cdot k$$

Los nudos de barras sobre el eje están sometidos a pares M y $M' = M$, asimétricos, de un lado y otro de tal eje; para reducir la estructura a la mitad se ha de considerar uno solo de aquellos pares en cada nudo (reducir a la mitad el momento aplicado), pero las barras como la 8-13 se han de considerar

con rigidez mitad y, al final, duplicar los momentos sobre cada nudo de estas barras. Respecto a barras como la 1-2 el extremo 2, por antimetría, es equivalente a una articulación y su rigidez global se calcula mediante el siguiente proceso:



Como se sigue en las sucesivas figuras adjuntas, si μ y μ' son los momentos de empotramiento perfecto debido a acciones exteriores, basta considerar $\mu_0 = \mu - \beta \mu'$ en el lado empotrado para no trabajar con el del apoyo. Y se ha de utilizar una rigidez virtual $k_v = k(1 - \beta \beta')$ para no tener que transmitir y equilibrar en cada transmisión al apoyo.

Digamos para concluir que, cuando una estructura es simétrica con cualquier tipo de sollicitación exterior, siempre se puede resolver mediante la superposición de un estado de cargas simétrico y otro antisimétrico, que se resuelven por separado. Si es GT el grado de traslacionalidad, tal será suma

del grado de traslacionalidad simétrico (GTS) y del antisimétrico (GTA), o sea

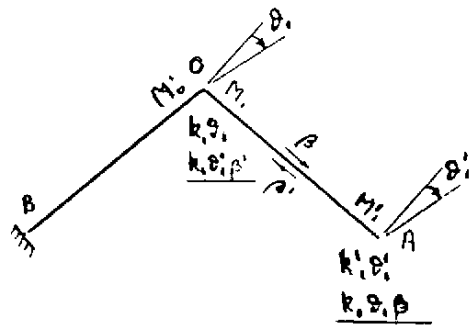
$$(GT) = (GTS) + (GTA)$$

La ventaja de esta descomposición estriba en la simplificación que se obtiene, al efectuarse en cada caso sobre la mitad de la estructura; además, que se consigue mayor sistematización, procedimiento más repetitivo; y una nueva economía, que en lugar de resolver un sistema de p ecuaciones con p incógnitas, se desglosa en dos sistemas menores, uno de p_s y otro de p_a ecuaciones con el mismo número de incógnitas cada uno, tal que $p_s + p_a = p$.

2.14.-

Otras simplificaciones.- Se van a dar una serie de simplificaciones, que a veces se utilizarán solamente en casos concretos y a veces se considerará si la simplificación obtenida a base de complicaciones en el cálculo ahoga la sencillez y reiteración del método de Cross. El alumno deberá hacer su propia selección y son solo un elemento de trabajo a utilizar cuando convenga.

- 2.14. 1).- Barras acodadas: Consideremos dos barras acodadas, típicas de los pórticos con dintel a dos aguas. Se trata de calcular la regidez virtual del extremo A de la figura, sin ne-

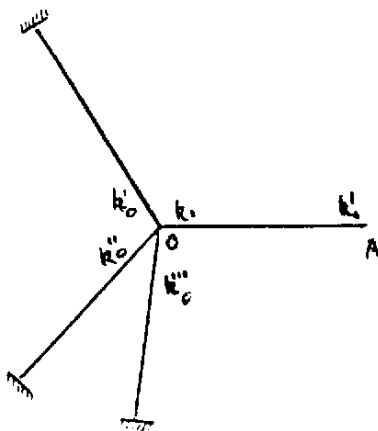


$$\begin{aligned} M_1 &= k_1 \theta_1 + k_0 \beta \\ M_0 &= k_0 \theta_1 + k_0' \beta' \\ M_0' &= k_0' \beta' \\ M_1 + M_0 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} M_1 &= k_1 \theta_1 + k_0 \beta \\ M_0 &= k_0 \theta_1 + k_0' \beta' \end{aligned} \right\} \theta_1 = - \frac{k_1 \theta_1' \beta'}{k_1 + k_0'}$$

$$M_1 = k_1 \theta_1 - \frac{k_1 k_0 \beta \beta'}{k_1 + k_0'}$$

$$k_1 = k_1' \left(1 - \frac{k_1 \beta \beta'}{k_1 + k_0'} \right)$$

cesidad de redistribuir y equilibrar con el resto; supuesta la barra OB libre de acciones exteriores y la OA sometida a acciones tales que producen ángulos θ_1 y θ_1' , el reparto se indica en la figura superior. Para los valores particulares, comunes en pórticos, $k_0 = k_1 = k_1'$; $\beta = \beta' = 1/2$, resulta $k_v = 7/8 \cdot k_1'$. De modo análogo se podría calcular la rigidez virtual en el nudo O, cociente de M_1/θ_1 .



Si es un conjunto de barras radiales partiendo de O, la rigidez virtual en A es, por generalización

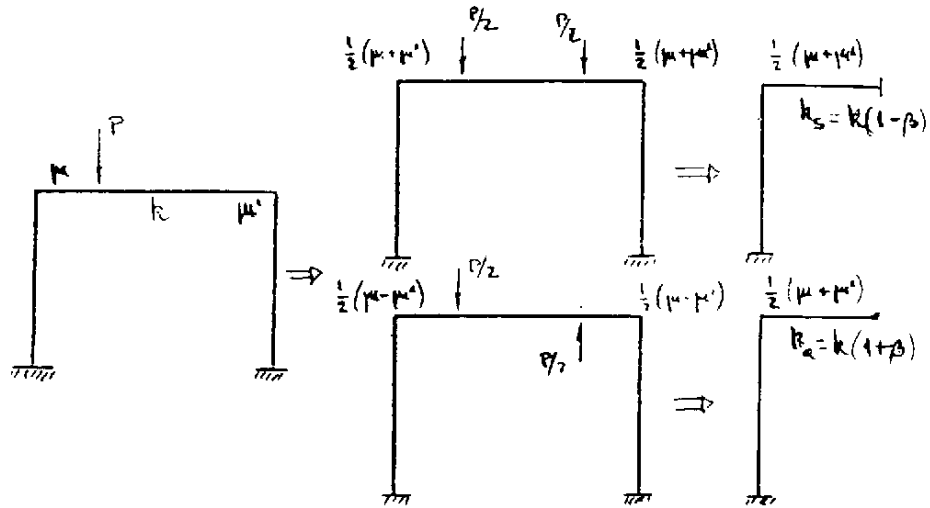
$$k_{va} = k_1' \cdot \left[1 - \frac{k_1 \cdot \beta \cdot \beta'}{\Sigma k_0} \right]$$

siendo Σk_0 la suma de todas las rigideces concurrentes en O.

2.14.

2).- Pórticos rectos: Aplicando las simplificaciones de simetría y antisimetría al pórtico de la figura en la pág.sig., se sigue el proceso de cálculo indicado. Se aprecia la gran ventaja de hacerse el reparto de una sola vez y, de paso, de calcular los valores exactos.

Aclaremos que fuerzas horizontales suponen antisimetría, lo mismo que el asiento de un apoyo (por desplazamiento), mientras que variaciones térmicas son simetría.

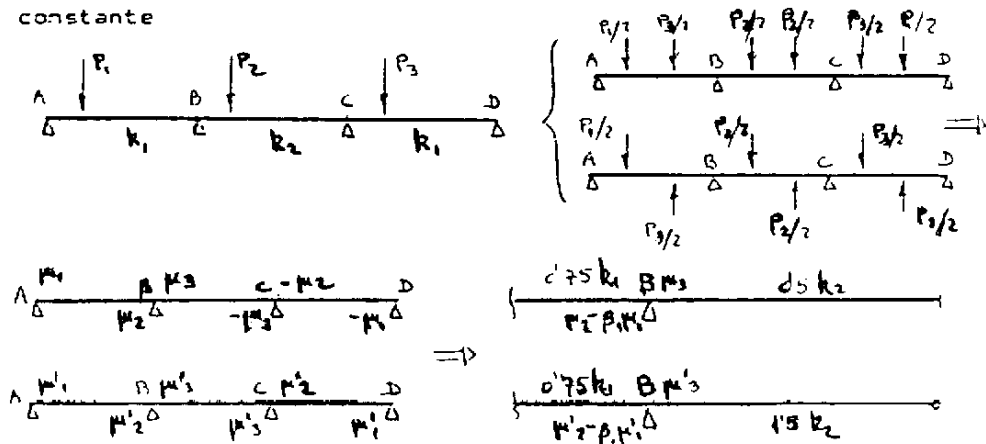


2.14.

3).-Vigas continuas: En ellas tienen gran aplicación la simetría y antimetría, si son simétricas geométricamente; se ha de tener en cuenta si en el eje de simetría coincide apoyo o centro de viga, a efecto de lo explicado más atrás (empotramiento o articulación).

Un caso simple y claro es la viga sobre tres vanos de sección constante

constante



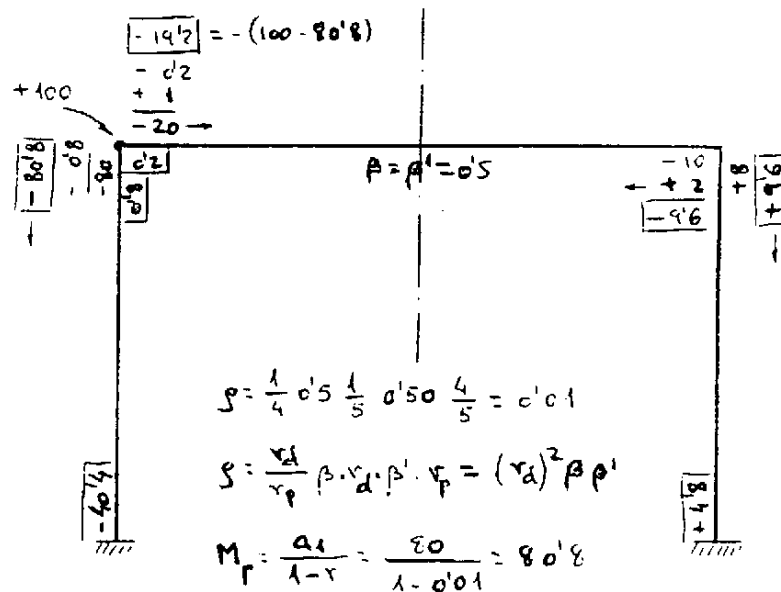
2.14.

Los repartos se logran también de una sola vez y los valores obtenidos son, por tanto, exactos.

4).-Distribuciones "tipo": En ciertos casos de estructuras a veces puede estudiarse una ley de formación clara en el mecanismo de equilibrios, distribuciones y ciclos sucesivos; cuanto más sencilla sea la estructura, más sencilla será esa

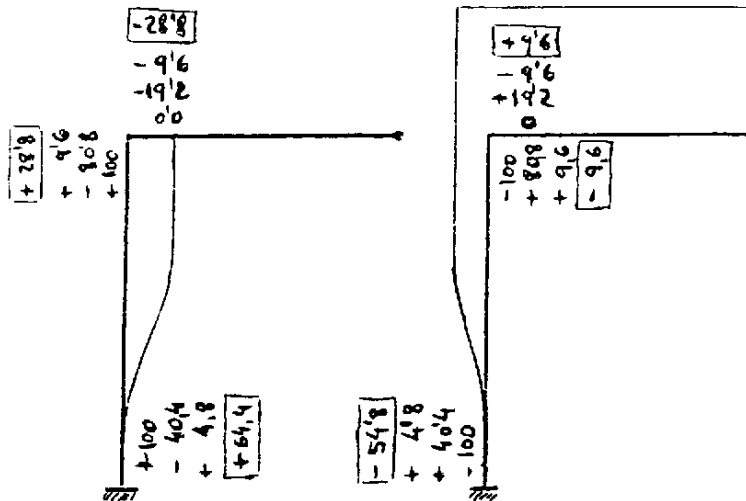
ley de formación. Hay que aclarar también que la tal ley de formación solo puede interesar para cálculos repetitivos e incluso para programas por ordenador; insistimos que se puede ahogar lo repetitivo y sistemático del método de Cross.

Pues bien, si se conoce esa ley, y más si existe simetría o antisimetría, el proceso puede reducirse a efectuar la distribución de momentos unidad (ó + 100) en los nudos estudiados y superponer luego los momentos de empotramiento perfecto, localizados en las correspondientes barras de actuación; a tales distribuciones se las denomina distribuciones tipo. Se va a analizar un ejemplo de pórtico recto, en el cual los dos nudos son equivalentes y basta estudiar uno solo de ellos:



Se ve que existe una ley de formación en el momento superior del pilar izquierdo; es una progresión geométrica de razón $r = (rd)^2 \cdot \beta \cdot \beta'$; el resto de los momentos, conocido éste, se calcula fácilmente por transmisiones.

Y para aplicarlo ahora a casos concretos, se va a resolver un desplazamiento del dintel y un incremento de temperatura. El primero es antisimétrico; se suponen cuatro momentos, +100, en los pilares (cabeza y base) y se ha de tener en cuenta el reparto del izquierdo y derecho superiores. El de temperatura, simétrico,, se resuelve con -100 y +100 en las cabezas, análogo al anterior. Véase página siguiente.



2.14.

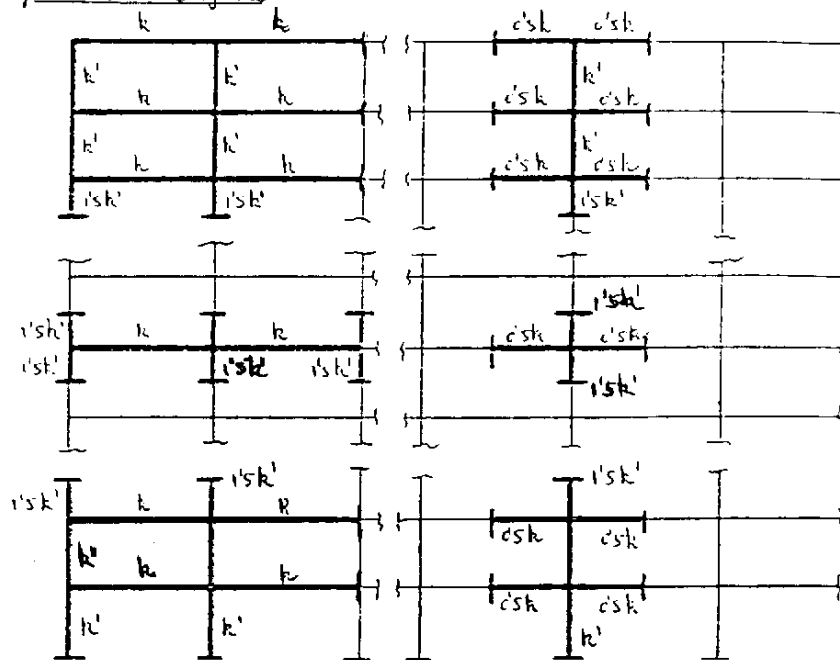
5).-Simplificaciones en estructuras de edificios: En el caso de edificios, si están bien modulados, las cuadrículas se repiten con regularidad; y por simplicidad constructiva se acostumbra a uniformizar lo más posible dinteles y pilares; además, las sobrecargas son iguales en todos los pisos, salvo generalmente en terraza y piso inferior (en donde pueden suponerse mayores sobrecargas).

Si el número de pisos y vanos es grande los valores se hacen repetitivos en zonas centrales y se pueden considerar tres zonas típicas, tanto en dirección vertical como en horizontal (ver figs.pág.sig.); por tanto, tendremos seis regiones diferentes a efecto de cálculo. Y como las dos hipótesis de cargas más importantes son carga total en todos los dinteles o carga alternada en los mismos, se consideran por separado ambas simplificaciones.

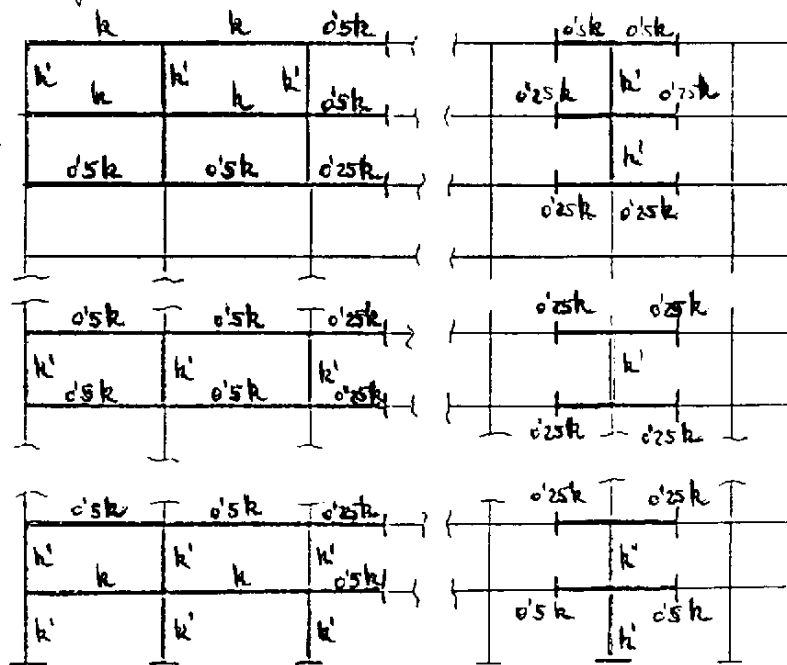
En los pisos todos cargados los pilares resultan antimétricos; el piso intermedio se corta por planos a mitad de altura de pilares, con rigideces $k_v = k_p(1 + \beta) = 1.5 \cdot k_p$; en el centro de la estructura se consideran pilares antimétricos y dinteles simétricos; conviene tomar dos o tres pisos superiores e inferiores, y lo mismo en horizontal, para compensar la discontinuidad.

En la carga alternada se corta horizontalmente por los planos de dinteles, dividiéndolos longitudinalmente en dos de rigidez mitad; y en vertical se corta por la mitad de los vanos.

pisos todos cargados



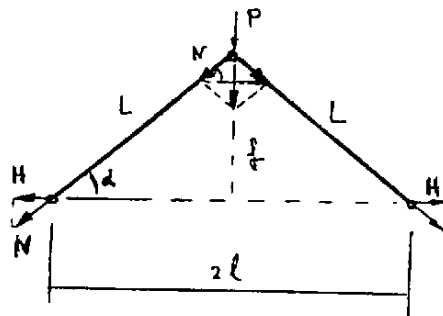
pisos carga alternada



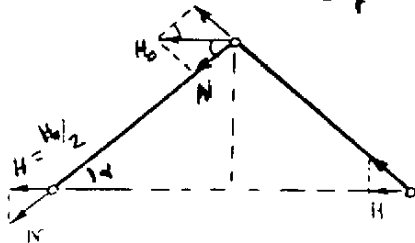
2.15.- Estudio especial de estructuras trianguladas y barras acodadas
 .- Por su particular interés, se presenta este estudio, independientemente de las simplificaciones en barras acodadas visto más atrás, puesto que se presenta en multitud de estructuras, en pórticos con dintel a dos vertientes por ejemplo, que dan lugar a empujes laterales por efecto arco.

Se parte de nudos articulados, en lugar de empotrados. Si la hipótesis de partida en el método de Cross es la de empotramiento perfecto en los nudos, llegando a la situación real de empotramiento elástico por la aplicación sucesiva de pares, que van reduciendo las de empotramiento perfecto, también podemos partir de la articulación en todos los nudos, a los cuales vamos aplicando pares sucesivos hasta llegar a la situación real. (Las condiciones de una estructura no se alteran al introducir articulaciones en los nudos, tantas cuanto sea preciso, siempre que pasen a ser acciones exteriores los pares de empotramiento correspondientes).

Consideremos dos barras acodadas, que forman arco y consideremos como articulados los tres nudos; al articularlos hemos de trasladar a éstos las fuerzas exteriores (reacciones isostáticas); y después consideraremos también las reacciones correspondientes a los pares de empotramiento (reacciones hiperestáticas).



$$N = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha}; \quad H = N \operatorname{cos} \alpha = \frac{P}{2} \frac{f}{l}$$



$$N = \frac{H_0}{2} \frac{1}{\operatorname{cos} \alpha}; \quad H = N \operatorname{cos} \alpha = H_0/2$$

Si actúa una fuerza, P, vertical en cumbre, su equivalente es la fuerza horizontal, H, en cada nudo inferior.

Análogamente, la fuerza horizontal H₀ da componentes en la misma dirección y de valor su mitad.

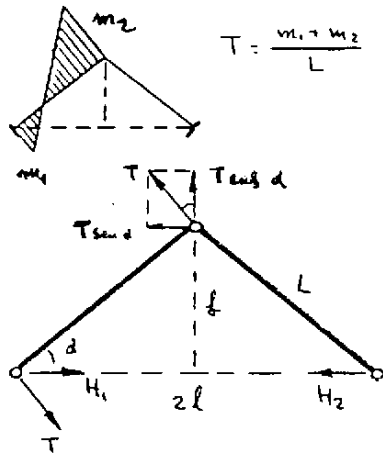
Si ahora pasamos a considerar acciones hiperestáticas en la barra izquierda, (ver pag. sig.) tendremos esfuerzos en sus extremos, transversales, de valores:

$$T = (m_1 + m_2)/L = (\Sigma m)/L;$$

uno de ellos se transmite directamente al apoyo, dando un empuje -T sena; el otro, descompuesto, y aplicando los dos casos anteriores, da en total:

$$-T \operatorname{sen} \alpha - \frac{T \operatorname{cos} \alpha}{2} \cdot \frac{\operatorname{cos} \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} + \frac{T \operatorname{sen} \alpha}{2}$$

$$= -\frac{T \operatorname{sen} \alpha}{2} + \frac{T \operatorname{cos}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha} = -\frac{T}{2 \operatorname{sen} \alpha}$$



$$T = \frac{m_1 + m_2}{L}$$

$$= - \frac{\Sigma m}{2 \cdot L \cdot \text{sen} \alpha} = - \frac{\Sigma m}{2 \cdot f} = H_1$$

$$H_2 = \frac{T \text{sen} \alpha}{2} + \frac{T}{2} \cdot \text{cos} \alpha \cdot \frac{1}{f}$$

En el caso de carga uniformemente repartida en proyección horizontal ($2 \cdot p \cdot l$), en cumbrera actúa la mitad ($p \cdot l$), dando $H = (p l^2) / (2f)$ y cada otra mitad se transmitirá directamente a los pilares, a través de los nudos inferiores.

En el caso de desplazamientos por efecto arco y actuaciones simétricas, la relación entre los desplazamientos y δ es la siguiente:

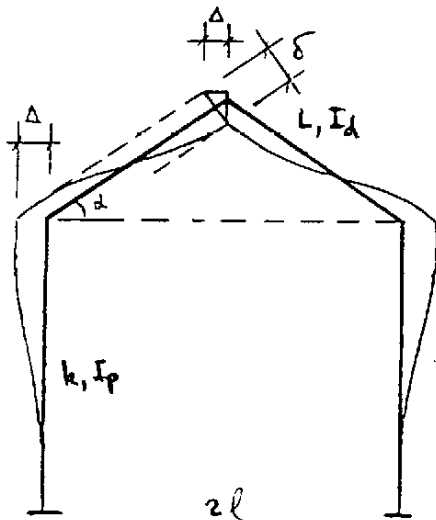
$$\frac{\delta}{\Delta} = \frac{L}{f}$$

y los momentos transversales en en las barras

$$M_d = \frac{6 \cdot E \cdot I_d \cdot \delta}{L^2} = \frac{6 \cdot E \cdot I_d}{L^2} \cdot \frac{\Delta \cdot L}{f}$$

$$= \frac{6 \cdot E \cdot I_d \cdot \Delta}{L \cdot f} ;$$

$$M_p = \frac{6 \cdot E \cdot I_p \cdot \Delta}{h^2}$$

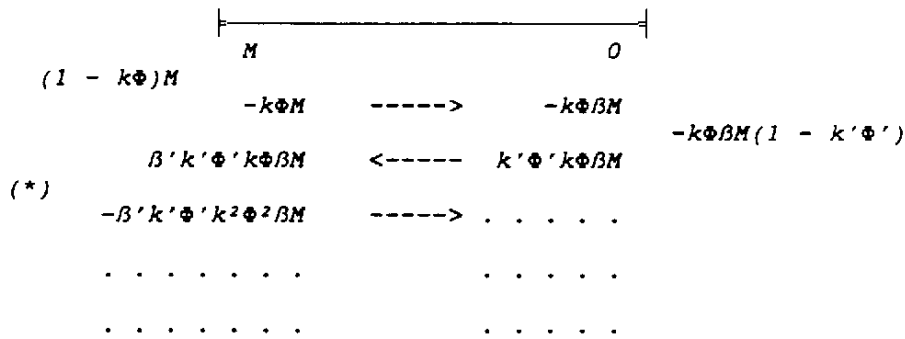


2.16.

Barras con empotramientos semirrígidos.— La hipótesis de indeformabilidad de los ángulos que forman las barras de un nudo, que es correcta en las estructuras de hormigón armado, no es aplicable en todos los casos, especialmente cuando se trata de estructuras metálicas u otras. En estos casos, y para cada tipo de acción, se ha comprobado que toda barra gira un ángulo respecto al nudo que puede considerarse proporcional al momento de empotramiento que la solicita. Por tanto, deben

introducirse dos nuevos coeficientes para cada barra, ϕ y ϕ' , que multiplicados respectivamente por cada momento (derecho e izquierdo) nos proporcionen los ángulos anteriormente citados.

Partamos de una barra con empotramientos rígidos y solicitada únicamente por un par, M , en la izquierda. Al convertirse los empotramientos en semirrígidos, aparece en la lado izquierdo un giro $+\phi M$ y, por tanto, un par equivalente equilibrante $-\phi M$, que se transmite al derecho como $-\phi \beta M$; este último produce un giro en el extremo derecho $-\phi \beta \phi' M$ y, como consecuencia, un par equilibrante $+\phi \beta \phi' k' M$. Repitiendo sucesivamente las operaciones:



$$(\alpha) \quad \frac{1 - k\phi}{1 - kk'\phi\phi'\beta\beta'} \cdot M \quad ; \quad - \frac{k\phi\beta(1 - k'\phi')}{1 - kk'\phi\phi'\beta\beta'} \cdot M$$

puesto que $k\beta = k'\beta'$, el denominador queda $D = 1 - k^2\beta^2\phi\phi'$

Si ahora suponemos aplicados los momentos de empotramiento perfecto teóricos, μ y μ' , relativos a cualquier hipótesis de carga, resultarán los valores finales

$$\mu l = \frac{1 - k\phi}{D} \mu - \frac{k'\phi'\beta'(1 - k\phi)}{D} \mu' = \frac{(1 - k\phi)(\mu - k'\phi'\beta'\mu')}{1 - k^2\beta^2\phi\phi'}$$

y, análogamente,
$$\mu l' = \frac{(1 - k'\phi')(\mu' - k\phi\beta\mu)}{1 - k^2\beta^2\phi\phi'}$$

(*).-Progresión geométrica de razón $kk'\phi\phi'\beta\beta'$.

Si en lugar de los pares μ y μ' anteriores, partimos de pares $k\Theta$ y $\beta k\Theta$ en los extremos izquierdo y derecho, ello nos permitirá calcular el coeficiente de rigidez y el factor de transmisión de la siguiente forma:

$$M = \frac{(1 - k\beta)(k\Theta - k'\Phi'\beta k\Theta)}{1 - k^2\beta^2\Phi\Phi'} = \frac{(1 - k\Phi)(1 - k\beta^2\Phi')}{1 - k^2\beta^2\Phi\Phi'} k\Theta \quad ;$$

$$kI = \frac{M}{\Theta} = \frac{(1 - k\Phi)(1 - k\beta^2\Phi')}{1 - k^2\beta^2\Phi\Phi'} k$$

$$M' = \frac{(1 - k'\Phi')(\beta k\Theta - k\Phi\beta k\Theta)}{1 - k^2\beta^2\Phi\Phi'} = \frac{(1 - k'\Phi')(1 - k\Phi)}{1 - k^2\beta^2\Phi\Phi'} \beta k\Theta = M \cdot \beta I =$$

$$= \frac{(1 - k\Phi)(1 - k\beta^2\Phi')}{1 - k^2\beta^2\Phi\Phi'} k\Theta \cdot \beta I \quad \implies \quad \beta I = \frac{1 - k'\Phi'}{1 - k\beta^2\Phi'} \beta$$

En la práctica los valores de Φ y Φ' varían desde cero (caso de empotramientos rígidos) hasta $1/k$ (articulación); lo primero es evidente y lo segundo, como en la fórmula (a) sabemos que debe dar nulo en caso de articulación, se deduce que $\Phi = 1/k$.

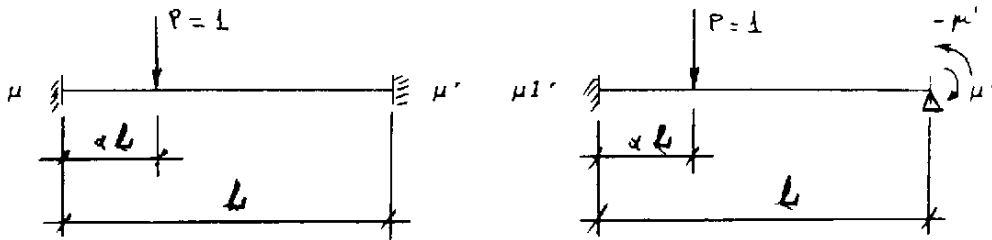
2.17.

Líneas de influencia mediante el método de Cross.— El método de Cross permite el cálculo de líneas de influencia y vamos a indicar, a título de ejemplos, algunos casos típicos.

Como se sabe, en una viga AB basta conocer las l.d.i. de los momentos sobre los extremos A y B para, mediante aquellas, deducir cualesquiera otra (esfuerzos cortantes, reacciones,

etc.).

En consecuencia, bastará indicar como se obtienen las l.d.i. de los momentos citados sobre los extremos. Se comienza tabulando los momentos de empotramiento, μ y μ' , de una viga doblemente empotrada y los $\mu l'$ de una apoyada-empotrada y a partir de éstas se obtendrán todos los demás. El proceso de cálculo es el siguiente:



$$\mu = \frac{Pab^2}{L^2} = \frac{1 \cdot \alpha L \cdot (1 - \alpha L)^2}{L^2} = \alpha \cdot (1 - \alpha)^2 \cdot L$$

$$\mu' = \frac{Pa^2b}{L^2} = \frac{1 \cdot \alpha^2 L^2 \cdot (1 - \alpha L)}{L^2} = \alpha^2 \cdot (1 - \alpha) \cdot L$$

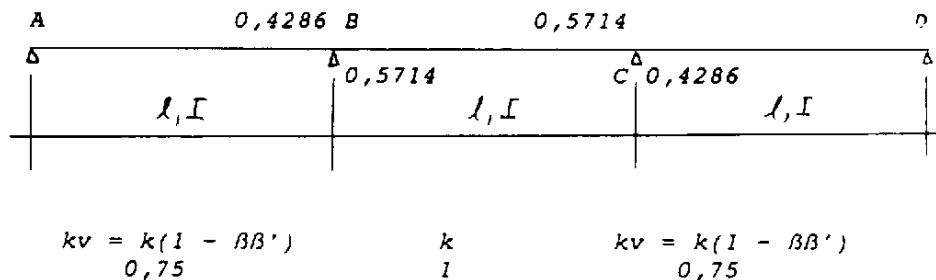
$$\mu l' = \frac{Pab^2}{L^2} + \frac{Pa^2b}{2L^2} = \frac{2ab^2 + a^2b}{2L^2} = \frac{\alpha(1 - \alpha)(2 - \alpha)L}{2}$$

Con las fórmulas anteriores y, dando valores a α , se forma el cuadro siguiente:

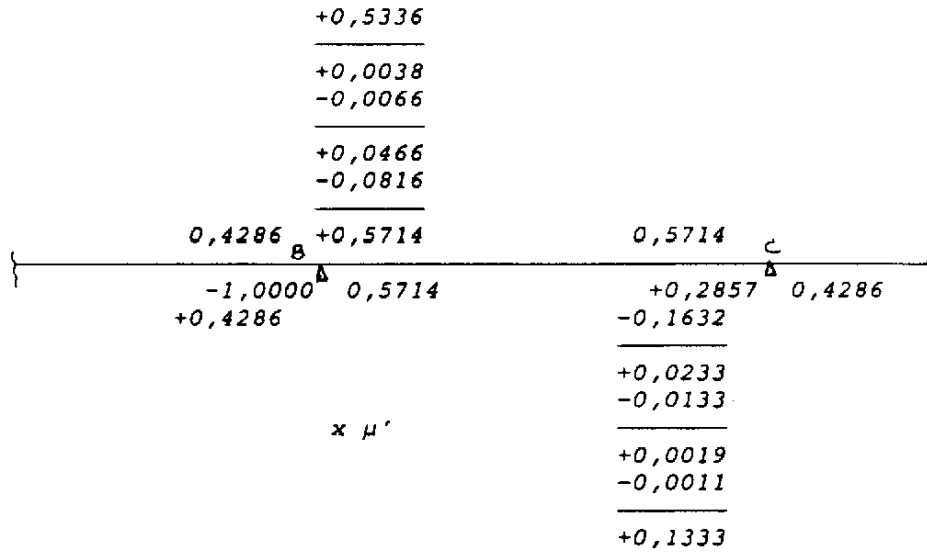
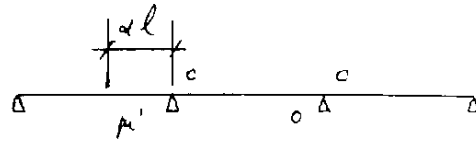
α	$\mu = \alpha(1 - \alpha)^2$	$\mu' = \alpha^2(1 - \alpha)$	$\mu 1' = \frac{\alpha(1 - \alpha)(2 - \alpha)}{2}$
0,10	0,081	0,009	0,0855
0,15	0,108	0,019	0,1180
0,20	0,128	0,032	0,1440
0,25	0,141	0,047	0,1640
0,30	0,147	0,063	0,1785
0,35	0,148	0,080	0,1875
0,40	0,144	0,096	0,1920
0,45	0,136	0,111	0,1920
0,50	0,125	0,125	0,1875
0,55	0,111	0,136	0,1795
0,60	0,096	0,144	0,1680
0,65	0,080	0,148	0,1535
0,70	0,063	0,147	0,1365
0,75	0,047	0,141	0,1170
0,80	0,032	0,128	0,0960
0,85	0,019	0,108	0,0735
0,90	0,009	0,081	0,0495
0,95	0,002	0,045	0,0250

Ahora se toman las cantidades μ , μ' y $\mu 1'$ como variables; se sitúa sucesivamente la carga unidad sobre cada una de las vigas susceptibles de ser cargadas y se determinan cada vez (por el método de Cross) los valores de los momentos en extremos en función de aquellos momentos. Para poder construir la l.d.i. faltará únicamente dar valores a μ , μ' y $\mu 1'$, según los valores del cuadro precedente.

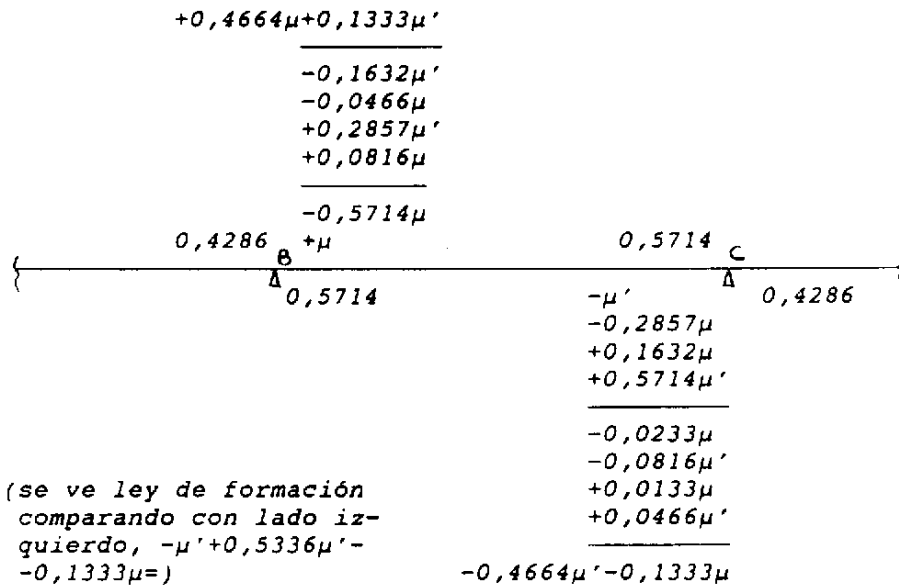
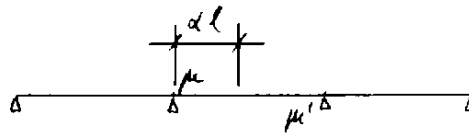
A continuación se analiza un ejemplo concreto para poder comprender mejor el proceso de cálculo, una viga continua sobre cuatro apoyos y tres vanos, de iguales longitudes e inercia en cada vano; se hace simplificación de apoyos extremos, no empotrados:



1°) carga en vanos extremos



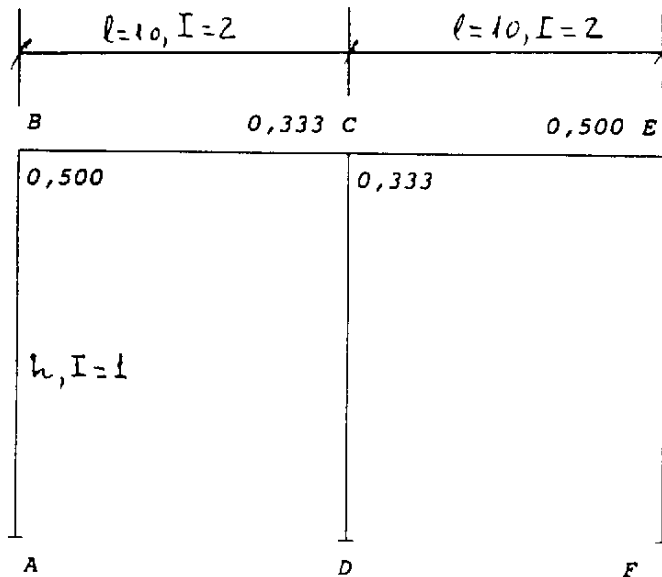
2°) carga en vano central



Con estos valores se forma a continuación el cuadro siguiente y, a partir del mismo, se dibuja la l.d.i. (véase pág. 46); téngase presente que en la rama CD de la viga al se ha de tomar a partir del empotramiento C.

α	rama AB		rama BC			rama CD	
	$\mu l'$	MB	μ	μ'	MB	$\mu l'$	MB
0,05	-0,0463	-24,7	0,045	-0,002	-21,3	0,0463	6,2
0,10	-0,0855	-45,6	0,081	-0,019	-39,0	0,0855	11,4
0,20	-0,1440	-76,8	0,128	-0,032	-64,0	0,1440	19,2
0,30	-0,1785	-95,2	0,147	-0,063	-77,0	0,1785	23,8
0,40	-0,1920	-102,5	0,144	-0,096	-80,0	0,1920	25,6
0,50	-0,1875	-100,1	0,125	-0,125	-75,0	0,1875	25,0
0,60	-0,1680	-89,6	0,096	-0,144	-64,0	0,1680	22,4
0,70	-0,1365	-72,8	0,063	-0,147	-49,0	0,1365	18,2
0,80	-0,0960	-51,2	0,032	-0,128	-32,0	0,0960	12,8
0,90	-0,0495	-26,4	0,009	-0,081	-15,0	0,0495	6,6
0,95	-0,0250	-13,3	0,002	-0,045	-6,9	0,0250	3,3
	MB = 0,5636 $\mu l'$		MB = -(0,4666 μ +0,1333 μ')			MB = 0,1333 $\mu l'$	

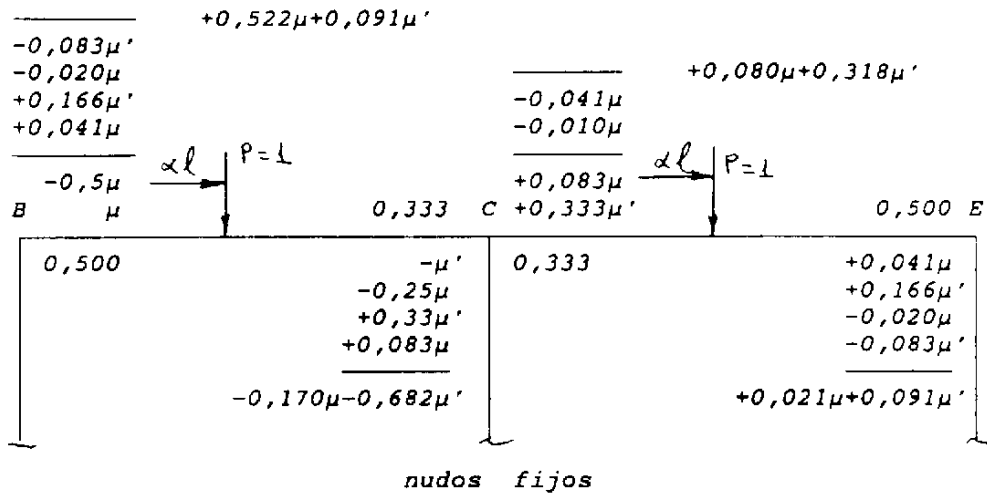
El método expuesto es aplicable igualmente a pórticos y a otro tipo de estructuras. Sea como segundo ejemplo el pórtico adjunto. Supongamos primeramente la carga unidad sobre BC y a



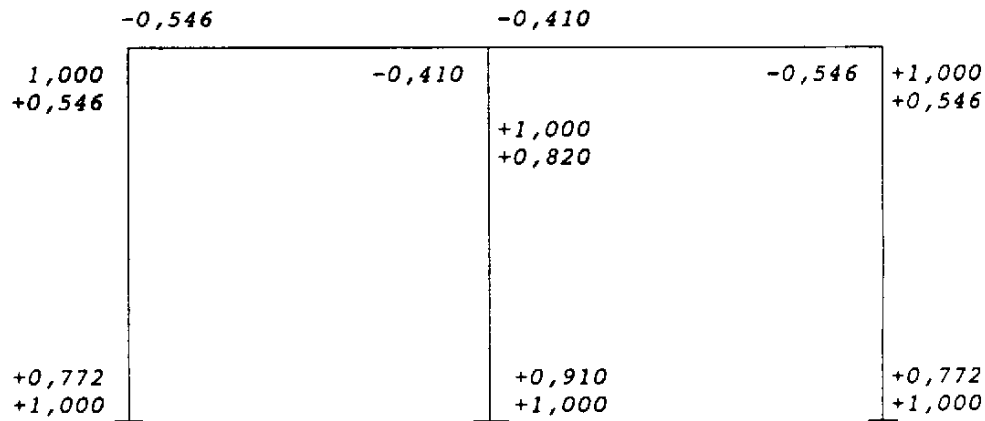
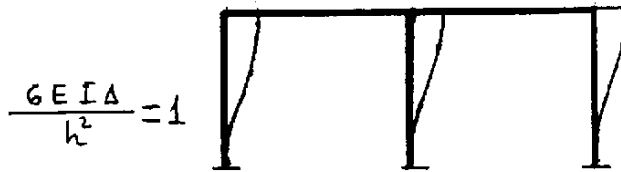
distancia al del extremo B; habrá cuatro etapas, 1ª 2ª con momentos de empotramiento perfecto sobre B y C, y 3ª y 4ª con movimiento transversal; ambos Cross están resueltos en la pág.sig..

$$L = 10, \quad I_d = 2$$

$$h = 5, \quad I_p = 1$$



Para los desplazamientos, los momentos en los pilares son, tanto en cabeza como en empotramiento inferior: $(6EI)/h^2 = 1$. Se indica la solución final.



corrimientos de los nudos x β

Solo resta establecer la ecuación de corte y hallar el valor de β :

$$T = \frac{0,772 + 0,545 + 0,820 + 0,910 + 0,546 + 0,772}{5} \cdot \beta =$$

$$= 0,872 \cdot \beta = 0,136\mu - 0,055\mu' \quad \text{=====>}$$

$$\beta = 0,156\mu - 0,063\mu';$$

y sustituyendo:

$$MBC = 0,522\mu + 0,091\mu' - 0,546(0,156\mu - 0,063\mu') =$$

$$= 0,437\mu + 0,125\mu'$$

$$MCB = -0,234\mu - 0,656\mu'$$

$$MCE = 0,218\mu + 0,311\mu'$$

Cuando la carga desliza sobre CE no es necesario volver a resolver el Cross, pudiéndose escribir por simetría:

$$\beta = 0,063\mu - 0,156\mu'$$

$$MBC = -0,125\mu + 0,064\mu'$$

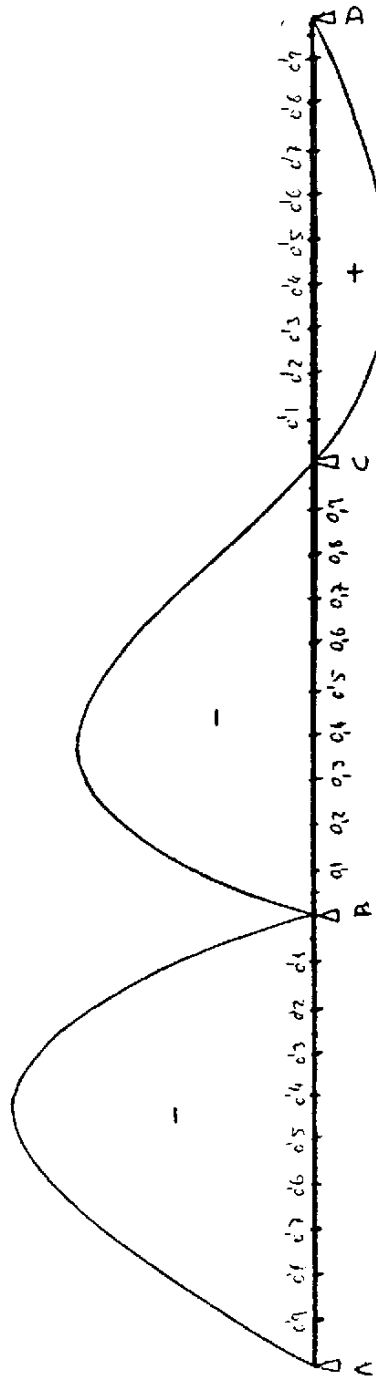
$$MCB = -0,344\mu - 0,016\mu'$$

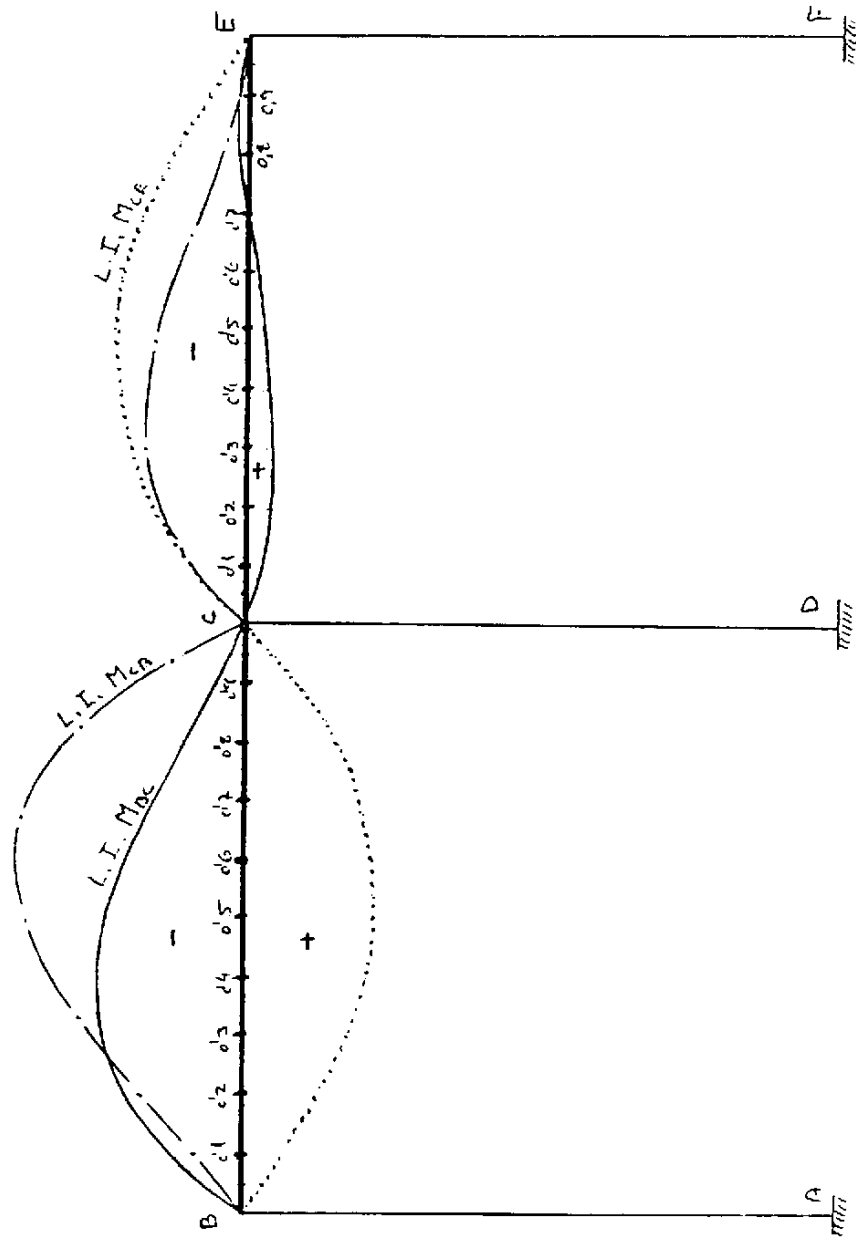
$$MCE = -0,311\mu - 0,218\mu'$$

Finalmente, con estos valores se confecciona el siguiente cuadro y se dibujan las l.d.i. correspondientes (véase pág. 47):

α	μ	μ'	momento BC		momento CB		momento CE	
			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,05	0,045	0,002	-20,0	5,5	-11,8	-15,5	10,4	-14,4
0,10	0,081	0,009	-36,5	9,5	-24,9	-28,0	20,5	-27,2
0,20	0,128	0,032	-60,0	14,0	-50,9	-44,5	37,8	-46,8
0,30	0,147	0,063	-72,1	14,3	-75,7	-51,6	51,6	-59,5
0,40	0,144	0,096	-74,9	11,9	-96,6	-51,0	61,2	-65,7
0,50	0,125	0,125	-70,2	7,6	-111,2	-45,0	66,1	-66,1
0,60	0,096	0,144	-60,0	2,8	-116,9	-35,3	65,7	-61,2
0,70	0,063	0,147	-45,9	-1,5	-111,2	-24,0	59,5	-51,6
0,80	0,032	0,128	-29,9	-4,2	-91,4	-13,0	46,8	-37,8
0,90	0,009	0,081	-14,1	-4,1	-55,2	-4,4	27,2	-20,5
0,95	0,002	0,045	-6,5	-2,6	-30,0	-1,4	14,4	-10,4

- (1).- Rama BC: $(0,437\mu + 0,125\mu')$
 (2).- Rama CE: $(-0,125\mu + 0,064\mu')$
 (3).- Rama BC: $(-0,234\mu - 0,656\mu')$
 (4).- Rama CE: $(-0,344\mu - 0,016\mu')$
 (5).- Rama BC: $(0,218\mu + 0,311\mu')$
 (6).- Rama CE: $(-0,311\mu - 0,218\mu')$

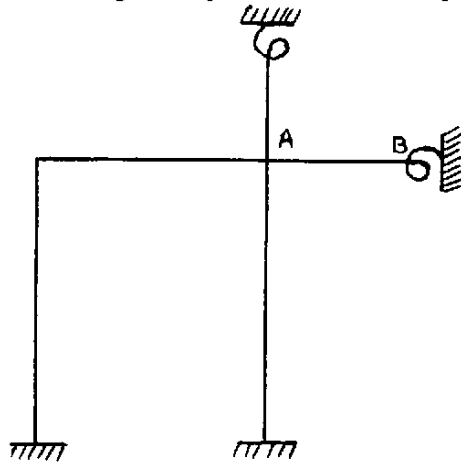




2.18.- Apoyos con empotramientos flexibles.

2.18.1.

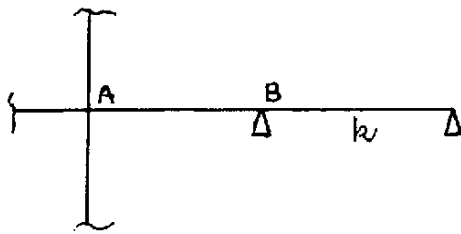
Introducción.- Consideremos la estructura de la figura, en la cual algunas piezas están empotradas flexiblemente, y no rígidamente; la unión se puede visualizar suponiendo un muelle, al cual están unidas las piezas en esas extremidades.



Un empotramiento flexible viene definido por una constante, denominada constante del muelle, tal que:

$$k = \frac{M}{\Theta} \quad ; \quad M = k \cdot \Theta \quad \longrightarrow \text{rigidez}$$

$$\Theta = \frac{1}{k} \cdot M = a \cdot M \quad \longrightarrow \text{flexibilidad}$$



Como se dirá más adelante, conocida la constante, k , de cada empotramiento flexible, la estructura puede sustituirse prolongando las piezas con extremos flexiblemente empotrados por otras con piezas articuladas en los extremos opuestos y de rigideces las de los muelles respectivos, según se muestra en el esquema adjunto y para la barra AB.

La unión de una barra con extremo flexible puede analizarse gráficamente mediante un diagrama $M - \Theta$, análogo a un diagrama de Hooke; en la práctica, se admite que la ley $M = k \cdot \Theta$ es lineal dentro de los límites elásticos del material.

2.18.2. Rigidez y factor de transmisión en el caso de empotramientos flexibles.- Comencemos estudiando una pieza biarticulada de longitud L. Si no hubiese juntas flexibles, y recordando, por ejemplo, Timoshenko, pág.151, tomo I, los ángulos en los extremos por la acción de dos momentos serían:



$$\Theta_a = \frac{m_a \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_b \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$

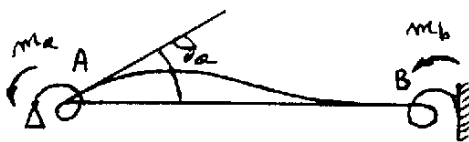
$$\Theta_b = \frac{m_b \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_a \cdot L}{6 \cdot E \cdot I}$$

Bastaría, por tanto, sumar los producidos por dichos momentos y por efecto de las juntas flexibles, resultando:

$$\Theta_a = \frac{m_a \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_b \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{m_a}{k_a} \tag{1}$$

$$\Theta_b = \frac{m_b \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_a \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{m_b}{k_b} \tag{2}$$

1).- Barra biempotrada con empotramientos flexibles en los extremos.- Para estudiar el efecto del extremo A sobre el B libremos el apoyo A y apliquemos un momento \$m_a\$ equivalente, que provoque la aparición de otro \$m_b\$ en B; bastará hacer \$\Theta_b = 0\$ en la fórmula (2) anterior; y de la definición de factor de transmisión, y por simetría de B respecto a A, obtenemos:



$$\frac{m_b}{m_a} = \beta_{ab} = \frac{\frac{L}{6 \cdot E \cdot I}}{\frac{L}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{1}{k_b}} = \frac{1}{2 + 6 \cdot \frac{E \cdot I}{L \cdot k_b}} = \frac{1}{2 + 6 \cdot \epsilon_b} \tag{3}$$

habiendo llamado $\frac{E \cdot I}{L \cdot kb} = \epsilon b$; $\frac{E \cdot I}{L \cdot ka} = \epsilon a$

y por analogía:

$$\beta_{ba} = \frac{1}{2 + 6 \cdot \epsilon a} \quad (4)$$

Sustituyendo en (1) el valor de m_b , que se ha obtenido al igualarla a cero, resulta:

$$\theta_a = \frac{m_a \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{m_a}{ka} - \frac{L}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \frac{m_a}{2 + 6 \cdot \epsilon b} ; \text{ y como } K_a = \frac{m_a}{\theta_a}$$

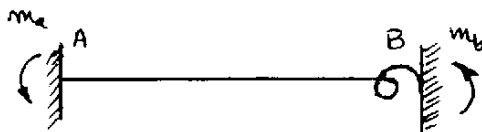
despejando y operando:

$$K_a = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \epsilon b}{1 + 4 \cdot (\epsilon a + \epsilon b + 3 \cdot \epsilon a \cdot \epsilon b)} \quad (5)$$

análogamente:

$$K_a = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \epsilon b}{1 + 4 \cdot (\epsilon a + \epsilon b + 3 \cdot \epsilon a \cdot \epsilon b)} \quad (6)$$

2).- Barra biempotrada con empotramientos flexibles en un extremo.- Bastará suponer el extremo empotrado A infinitamente rígido, $ka = \infty$, en lo que a la junta se refiere; esto implica



$$\epsilon a = \frac{E \cdot I}{L \cdot ka} = 0 ;$$

sustituyendo en las fórmulas (3) (4), (5) y (6), quedando:

$$\beta_{ab} = \frac{1}{2 + 6 \cdot \epsilon b} \quad (7)$$

$$K_a = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \epsilon b}{1 + 4 \cdot \epsilon b} \quad (9)$$

$$\beta_{ba} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$K_b = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{1 + 4 \cdot \epsilon b} \quad (10)$$

3).- Barra articulada con un empotramiento flexible.-
Bastará hacer en (3) y (5) $k_b = 0$, $\epsilon_b = \infty$, quedando

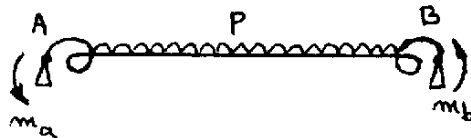


$$\beta_{ab} = 0 \quad (11)$$

$$K_a = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot \epsilon a} \quad (12)$$

2.18.3.

Momentos de empotramiento, barra biempotrada, empotramientos flexibles ambos lados y carga uniformemente repartida.- Se sabe que, en el caso de doble apoyo y carga uniforme (véase formulario de Resistencia de Materiales), los ángulos en los extremos valen (en A positivo, en B negativo):



$$\theta_a = -\theta_b = \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

Si ahora actúan los momentos m_a y m_b de empotramiento, por superposición, sumando los valores de las fórmulas (1) y (2), se obtiene:

$$\theta_a = \frac{m_a \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_b \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{m_a}{k_a} + \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta_b = \frac{m_b \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_a \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{m_b}{k_b} - \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

La condición de empotramiento se obtiene igualando a cero las anteriores expresiones; resolviendo en m_a y m_b se obtienen las dos fórmulas siguientes; y si la barra es simétrica, $e_a = e_b = e$, quedando la tercera:

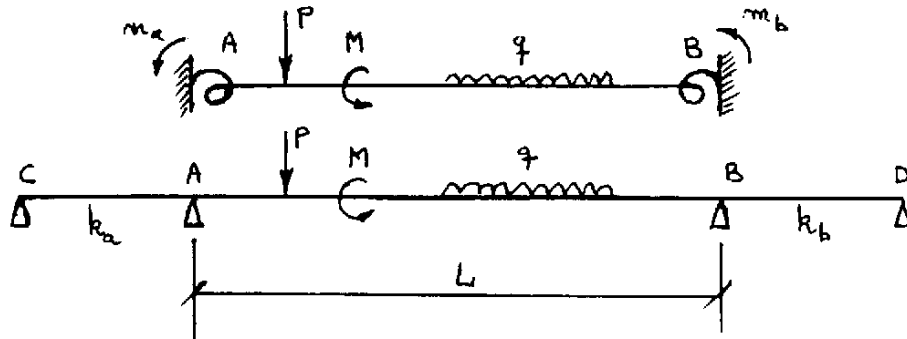
$$m_a = - \frac{p \cdot L^2}{4} \cdot \frac{1 + 6 \cdot e_b}{4 \cdot (1 + 3 \cdot e_a) \cdot (1 + 3 \cdot e_b) - 1}$$

$$m_b = + \frac{p \cdot L^2}{4} \cdot \frac{1 + 6 \cdot e_a}{4 \cdot (1 + 3 \cdot e_a) \cdot (1 + 3 \cdot e_b) - 1}$$

$$m_b = - m_a = \frac{p \cdot L^2}{12} \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot e}$$

2.18.4.

Idem para cargas cualesquiera.- El método anteriormente expuesto para calcular los momentos de empotramiento de una viga con empotramientos flexibles es bastante laborioso; los ángulos pudieran calcularse por superposición, con la ayuda de un formulario completo, tipo Ensidesa. Sin embargo, para aplicaciones numéricas concretas es preferible el siguiente método:



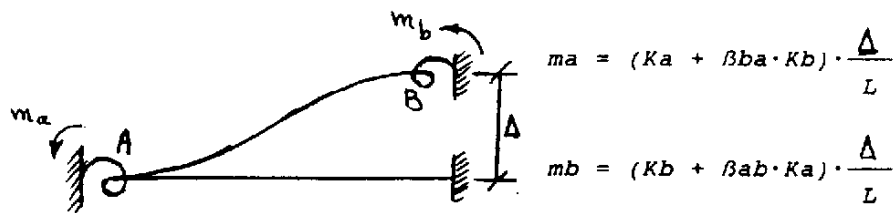
Se puede reemplazar la barra propuesta por otra continua, obtenida suprimiendo los empotramientos flexibles y añadiendo dos vanos con los empotramientos opuestos articulados y de rigideces k_a y k_b respectivamente.

Ante cualquier momento, m , aplicado en A, por ejemplo, se producirá un giro en A igual a m/k_a ; y lo mismo para el extremo B; resuelta la viga completa, los momentos finales en A y en B serán los de la viga propuesta.

El método se generaliza inmediatamente al caso de junta flexible en un solo extremo o al caso de algún extremo articulado, etc..

2.18.5. Momentos producidos en barras con empotramientos flexibles y traslación de un apoyo.— Resolveremos tres casos, según se sigue a continuación:

1) Barra biempotrada, empotramientos flexibles en ambos extremos: Recordando que



sustituyendo en ambas fórmulas los valores de K_a , K_b , β_{ab} , β_{ba} , dadas en las fórmulas anteriores (5), (6), (3) y (4) y operando convenientemente, se obtienen:

$$m_a = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{L^2} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \epsilon_b}{1 + 4 \cdot (\epsilon_a + \epsilon_b + 3 \cdot \epsilon_a \cdot \epsilon_b)}$$

$$m_b = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{L^2} \cdot \frac{1 + 2 \cdot \epsilon_a}{1 + 4 \cdot (\epsilon_a + \epsilon_b + 3 \cdot \epsilon_a \cdot \epsilon_b)}$$

y, si los empotramientos son iguales, $\epsilon_a = \epsilon_b = \epsilon$

$$m_a = m_b = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + 6 \cdot \epsilon}$$

2) Barra biempotrada, empotramiento flexible en un solo extremo: Si el empotramiento flexible está en B, bastará sustituir en las mismas fórmulas (5), (6), (3) y (4) los valores de K_a , K_b , β_{ab} , β_{ba} dados en las otras fórmulas (7), (8), (9) y (10), quedando ahora:

$$\beta_{ab} = \frac{1}{2 + 6 \cdot \epsilon b} \quad (7)$$

$$K_a = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1 + 3 \cdot \epsilon b}{1 + 4 \cdot \epsilon b} \quad (9)$$

$$\beta_{ba} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

$$K_b = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{1 + 4 \cdot \epsilon b} \quad (10)$$

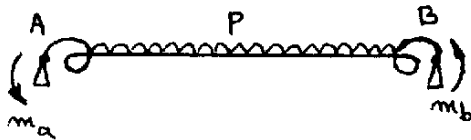
3).- Barra articulada con un empotramiento flexible.-
Bastará hacer en (3) y (5) $k_b = 0$, $\epsilon_b = \infty$, quedando



$$\beta_{ab} = 0 \quad (11)$$

$$K_a = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L} \cdot \frac{1}{1 + 3 \cdot \epsilon a} \quad (12)$$

Momentos de empotramiento, barra biempotrada, empotramientos flexibles ambos lados y carga uniformemente repartida.- Se sabe que, en el caso de doble apoyo y carga uniforme (véase formulario de Resistencia de Materiales), los ángulos en los extremos valen (en A positivo, en B negativo):



$$\theta_a = -\theta_b = \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

Si ahora actúan los momentos m_a y m_b de empotramiento, por superposición, sumando los valores de las fórmulas (1) y (2), se obtiene:

$$\theta_a = \frac{m_a \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_b \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{m_a}{k_a} + \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta_b = \frac{m_b \cdot L}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{m_a \cdot L}{6 \cdot E \cdot I} + \frac{m_b}{k_b} - \frac{p \cdot L^3}{24 \cdot E \cdot I}$$

2.19.- Resumen del Método de Cross.

FASES DE CÁLCULO:

1º.- Cálculo del grado de traslacionalidad.

$$GT = GL - C$$

Siendo; b = número de barras.

n = número de barras que confluyen en el nudo.

Tenemos:

$$GL \text{ (grados de libertad en el plano)} = 3b$$

C (coacciones), igual a la suma de:

$$2(n-1) \text{ coacciones internas por cada nudo libre.}$$

$$2 \text{ coacciones externas por cada barra con base fija.}$$

$GT \leq 0$.- Caso de estructura intraslacional.

Se considera un solo estado fundamental en la que se ha impedido la traslación de todos sus nudos.

$GT > 0$.- Caso de estructura traslacional.

Se considera un estado fundamental y tantos estados paramétricos como grados de traslacionalidad existan, considerando en estos últimos los efectos que sobre la estructura descargada producen las traslaciones sucesivas de los nudos, originadas al retirar algunas de las fuerzas restrictivas o apoyos ficticios.

El estado real «Er» es la superposición del estado fundamental «Ef» y de los estados paramétricos «Ep», afectados por los coeficientes «αp» de proporcionalidad entre las traslaciones de la estructura real y las traslaciones supuestas de los estados paramétricos.

$$E_r = E_f + \sum E_p \cdot \alpha_p$$

2º.- Predimensionamiento (E,L,I,A) y cálculo de rigideces al giro (K) (4EI/L), coeficientes de reparto (r) y transmisión (t) (1/2) de la estructura.

ESTADO FUNDAMENTAL.

3º.- ETAPA 1ª. Cálculo de los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas exteriores. (Me)

4º.- ETAPA 2ª. Nudos en libertad de giros pero con desplazamientos impedidos equilibrio y transmisión. (Mf)

ESTADOS PARAMÉTRICOS.

5º.- ETAPA 3ª. Cálculo de los momentos «μ» de desplazamiento transversal «δ» con giros impedidos. En cada estado paramétrico.

$$(\mu = 6EI\delta/L^2, \mu = 1000 \cdot \alpha_p)$$

6º.- ETAPA 4ª. Nudos en libertad de giros pero con desplazamientos impedidos equilibrio y transmisión. (Mp)

Cálculo de los coeficientes de proporcionalidad « α_p », tales que al hacer la superposición de los estados se anulen las fuerzas externas (componentes isostáticas en los apoyos ficticios, igual a «cero» si no existen cargas externas en el nudo o sección considerada) con las internas (componentes hiperestáticas halladas en cada estado, afectadas por los coeficientes de proporcionalidad). Obteniéndose tantas ecuaciones de equilibrio como estados paramétricos.

Las acciones de corte en cada caso se recuerda que son siempre de la forma.

$$T = \Sigma(\mu_1 + \mu_2)/h$$

ESTADO FINAL.

Resuelto el sistema y hallados « α_p » los momentos finales (momentos de extremo hiperestáticos) serán:

$$M_r = M_f + \Sigma M_p \cdot \alpha_p$$

$$\Theta = M_r/K$$

$$\delta = \mu L^2/6EI$$

Las sollicitaciones finales de la estructura, reacciones y diagramas de momentos, tracción-compresión y cortaduras se obtendrán sumando los hiperestáticos extremos hallados y los isostáticos de cada viga.

SIMPLIFICACIONES

EXTREMO APOYADO

Modificación de rigideces.-



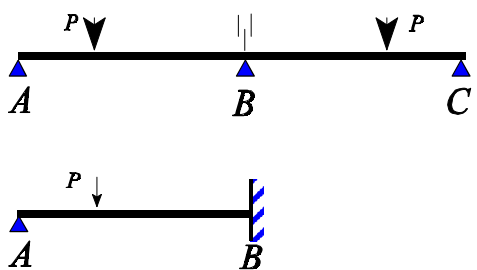
$$K_{BA} = K(1 - \beta\beta^*) = \frac{3}{4} \frac{4EI}{L}$$

Los momentos de empotramiento modificados serán:

$$\mu_A = 0 \qquad \mu_B = \mu_e + \mu_e^* \beta = \frac{3}{2} \mu_e$$

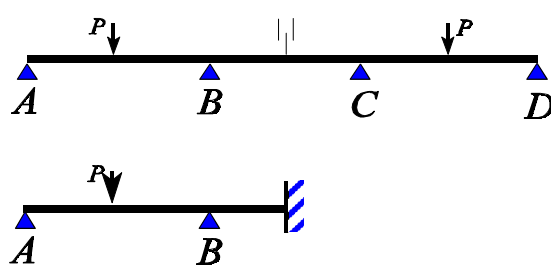
SIMETRÍAS

CASO 1°



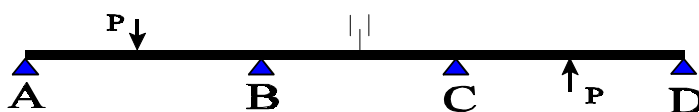
$$K_{BC} = \alpha$$

CASO 2°



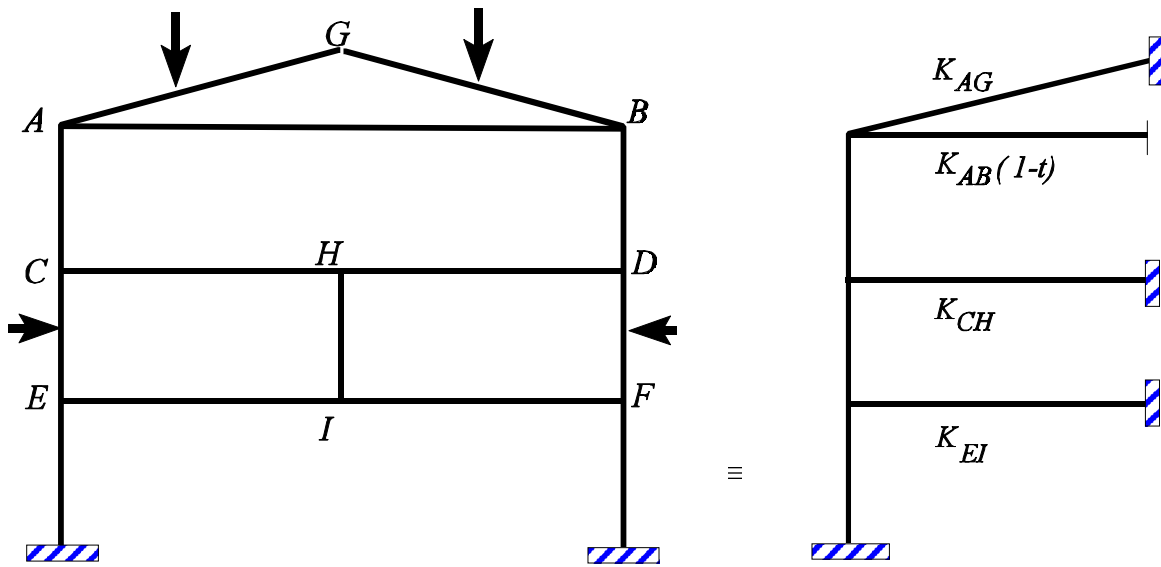
$$K_{BC} = K(1 - \beta) = \frac{1}{2} \frac{4EI}{L}$$

ANTIMETRÍA



$$K_{BC} = K(1 + \beta) = \frac{3}{2} \frac{4EI}{L}$$

SIMPLIFICACIONES EN PÓRTICOS

SIMETRÍAANTIMETRÍA