

MÉTODO DE CROSS.

MÉTODO DE CROSS. - MÉTODO DE CROSS.

Javier Pajon Permuy.

Cita:

Javier Pajon Permuy (1997). *MÉTODO DE CROSS - MÉTODO DE CROSS..*
MÉTODO DE CROSS.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/5/1.pdf>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/pvp3/ykK/1.pdf>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.
Para ver una copia de esta licencia, visite
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.

MÉTODO DE CROSS.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

Cita: Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio (1997). *MÉTODO DE CROSS*. CONTINUACIÓN, CAPÍTULO II: TEORÍA DE ARCOS Y MÉTODO DE CROSS APLICADOS AL CÁLCULO DE ESTRUCTURAS.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/4>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.

Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <http://www.aacademica.org>.

CAPÍTULO II

MÉTODO DE CROSS

2.1.-

Introducción.- El método de Cross, que se expone a continuación, no es un método aproximado,, como muy corrientemente se cree, sino un método iterativo, que procede por aproximaciones sucesivas; en cada caso el calculista regula la exactitud a voluntad, cosa que es interesante señalar por su interés en tanteos previos; y permite calcular las incógnitas hiperestáticas con tanta precisión como se desee. Insistimos, es un método con una justificación física determinada. Si bien ha caído un tanto en desuso por el moderno cálculo matricial en ordenadores, no es menos cierto que presenta al alumno un mayor conocimiento físico de las estructuras al mostrarle el fenómeno "por pasos", como "en cámara lenta", tal "como puede suceder" realmente. Estimamos que es, por tanto, un método pedagógico y formativo, imprescindible para "entender". Además, que aun puede tener su aplicación en cálculo de despacho e incluso en algunos programas de ordenadores preparados al efecto.

Consideraremos exclusivamente estructuras planas y sometidas a cargas contenidas en su plano (la extensión del método de Cross a estructuras espaciales no tiene hoy razón práctica de ser); y entenderemos dichas estructuras constituidas por barras (vigas y soportes) unidas entre sí mediante nudos rígidos. En principio, y por condiciones de continuidad de la estructura y rigidez de los nudos, admitiremos que los ejes de las barras que coinciden en un mismo nudo giran todos el mismo

ángulo que el propio nudo.

Será necesario analizar previamente si, en la deformación de las barras de una estructura, los nudos solamente giran, sin desplazarse (estructuras intraslacionales) o si giran y se desplazan simultáneamente (estructuras traslacionales).

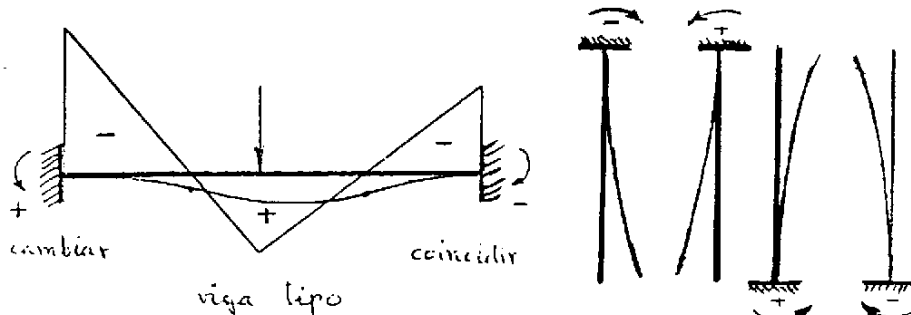
En esencia, el método de Cross, como enseguida veremos, procede por partes. Primeramente considera el efecto que las cargas realizan sobre las barras, impidiendo el giro de todos los nudos de la estructura. En una segunda etapa libera el giro de los nudos. Y luego, si la estructura es traslacional, en una nueva etapa analiza los desplazamientos.

Para exponer todo lo cual seguiremos el siguiente plan: como camino introductorio, y aunque no sea propiamente el método de Cross, se estudiará de entrada la barra doblemente empotrada: y, a partir de ella, la empotrada-apoyada y la apoyada-apoyada, que nos permitirán definir los conceptos de coeficiente de rigidez y factor de transmisión. Pasando luego al estudio del método de Cross propiamente dicho y las distintas etapas anunciadas.

2.2.-

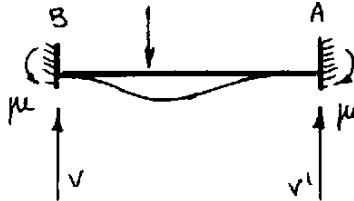
Convenio de signos.- Como quiera que las estructuras tienen frecuentemente varias barras coincidiendo en un mismo nudo, para evitar confusiones con el sentido de los momentos de extremo, en el método de Cross se adopta el convenio de considerar aquellos positivos si son sinextrorsum (contrario al de las agujas de un reloj) y negativos si son dextrorsum (coincidiendo con tal sentido).

Dibujaremos, además, los diagramas de momentos en las barras del lado de la concavidad, más intuitivo que el convenio clásico. Ello equivale, si bien se considera,, y en las barras horizontales, a cambiar el signo del momento flector en la izquierda y a mantenerlo en la derecha. Como aclaración y recordatorio se dibujan a continuación los distintos casos posibles:



2.3.-

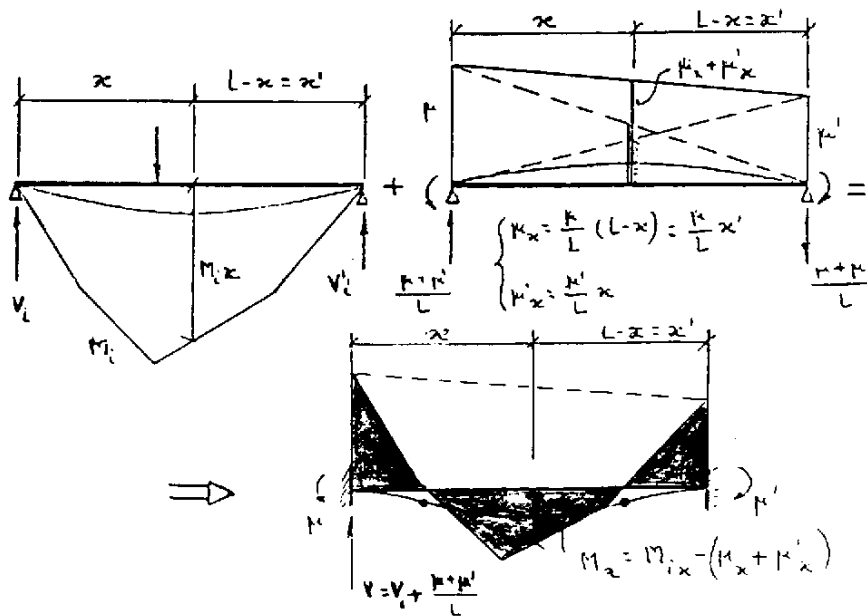
La barra doblemente empotrada.- El elemento más sencillo en las estructuras de las que enseguida nos vamos a ocupar es la barra doblemente empotrada, sin posibilidad de giro alguno en sus extremos, ni tampoco desplazamientos: son empotramientos perfectos, es decir, inalterables ante cualquier acción exterior y cualesquiera que sea el valor de ésta.



Puesto que tenemos cuatro incógnitas (una fuerza vertical y un momento en cada extremo) y no disponemos sino de dos ecuaciones de la estática ($\Sigma V = 0$, $\Sigma M = 0$) empleamos como ecuaciones complementarias las obtenidas mediante los dos teoremas de Möhr, aprovechando que las dos tangentes extremas forman ángulo nulo entre sí y que la flecha entre ambas es así mismo nula:

$$\begin{array}{l|l}
 (1) \implies \Sigma V = 0 & (3) \implies 0 = \Theta_{ab} = \int_b^a \frac{Mx}{E \cdot I} dx \\
 (2) \implies \Sigma M_a = 0 & (4) \implies 0 = \delta_{ab} = \int_b^a \frac{Mx}{E \cdot I} x \cdot dx
 \end{array}$$

Y para calcular la expresión del momento flector, M_x , a una distancia x del extremo izquierdo, empleamos el método de superposición: el fenómeno físico puede interpretarse partiendo de la viga isostática, que después de estar sometida a las acciones exteriores (diagrama de momentos isostáticos de la figura aquí más abajo, que da un valor M_i a la distancia x)



se lleva a la condición de empotramiento perfecto, aplicando en las secciones extremas dos pares (μ y μ' , de entrada desconocidos avidentemente, pero de valores concretos para cada sollicitación también concreta), los cuales deshacen el giro libremente adquiridos por la viga isostática:

$$Mx = Mix - \mu \frac{L-x}{L} - \mu' \frac{x}{L}$$

$$(3') \implies \int_0^L \frac{Mix}{E \cdot I} dx - \frac{\mu}{L} \int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I} dx - \frac{\mu'}{L} \int_0^L \frac{x}{E \cdot I} dx = 0$$

$$(4') \implies \int_0^L \frac{Mix}{E \cdot I} x \cdot dx - \frac{\mu}{L} \int_0^L \frac{L-x}{E \cdot I} x \cdot dx - \frac{\mu'}{L} \int_0^L \frac{x}{E \cdot I} x \cdot dx = 0$$

La gran aplicación de estas ecuaciones, además de introducirnos en los conceptos preconizados más atrás (rigidez y transmisión) y que se estudian en páginas siguientes, está en la consideración de vigas de sección variable. Por estar igualadas ambas a cero, en caso de material único e inercia constante, en las (3') y (4') se puede prescindir de $E \cdot I$. Pero en caso de inercia variable, y para tener en cuenta esa ley de variación del momento de inercia, multiplicándolas por un valor I_0 , momento de inercia de una sección típica, y llamando al cociente $I_0/I_x = \Gamma$ (evidentemente, en vigas de sección constante, $\Gamma = 0$), podemos analizar qué significa cada integral y el simbolismo de escritura que se va a adoptar:

$$\int_0^L \frac{Mix \cdot I_0}{I_x} dx = \int_0^L Mix \cdot \Gamma x \cdot dx = (Mi \cdot \Gamma) \implies \text{área del diagrama de momentos isostáticos modificados, S1 (3 de la fig.pag.sig.)}$$

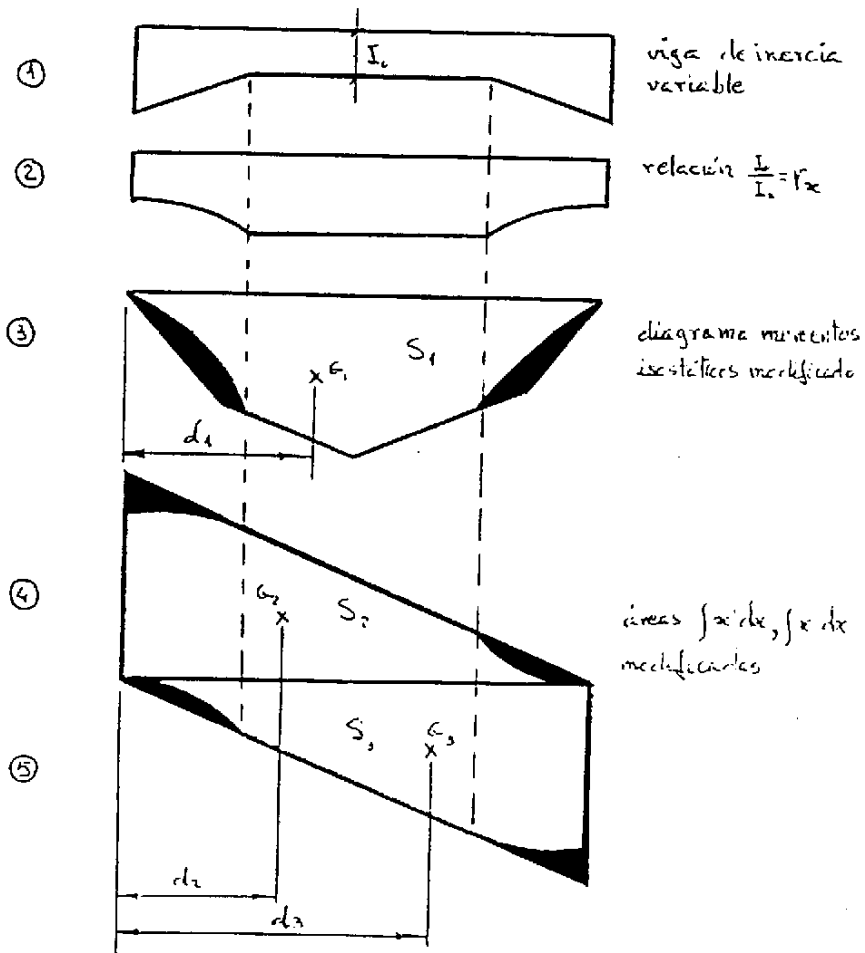
y lo mismo:

$$\int_0^L \frac{(L-x)I_0}{I_x} dx = \int_0^L x' \cdot \Gamma x \cdot dx = (x' \cdot \Gamma)$$

$$\int_0^L \frac{x \cdot I_0}{I_x} dx = \int_0^L x \cdot \Gamma x \cdot dx = (x \cdot \Gamma)$$

son las áreas superior, S_2 , e inferior, S_3 , números 4 y 5 figura inferior.

En cuanto a las integrales de (4') representan cada una, y por el mismo orden, el momento estático de las áreas anteriores respecto del eje por el extremo izquierdo de la viga, que representaremos respectivamente por $(M_i \cdot \Gamma)$, $(x' \cdot \Gamma)$ y $(x \cdot \Gamma)$.



Queda, pues, finalmente:

$$(Mi \cdot \Gamma) = \frac{\mu}{L} (x' \cdot \Gamma) + \frac{\mu'}{L} (x \cdot \Gamma)$$

resolviendo:

$$[Mi \cdot \Gamma] = \frac{\mu}{L} [x' \cdot \Gamma] + \frac{\mu'}{L} [x \cdot \Gamma]$$

$$\mu = \frac{\begin{vmatrix} (Mi \cdot \Gamma) & (x \cdot \Gamma) \\ [Mi \cdot \Gamma] & [x \cdot \Gamma] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (x' \cdot \Gamma) & (x \cdot \Gamma) \\ [x' \cdot \Gamma] & [x \cdot \Gamma] \end{vmatrix}} L = \frac{(x \cdot \Gamma)(Mi \cdot \Gamma) - (x \cdot \Gamma)[Mi \cdot \Gamma]}{[x \cdot \Gamma](x' \cdot \Gamma) - (x \cdot \Gamma)[x' \cdot \Gamma]} L \quad (5)$$

$$\mu' = \frac{\begin{vmatrix} (x' \cdot \Gamma) & (Mi \cdot \Gamma) \\ [x' \cdot \Gamma] & [Mi \cdot \Gamma] \end{vmatrix}}{\text{(el mismo)}} L = \frac{(x' \cdot \Gamma)[Mi \cdot \Gamma] - [x' \cdot \Gamma](Mi \cdot \Gamma)}{[x \cdot \Gamma](x' \cdot \Gamma) - (x \cdot \Gamma)[x' \cdot \Gamma]} L \quad (6)$$

Estas fórmulas (5) y (6) se pueden resolver analíticamente (por ejemplo, mediante integrales, y en nuestro cuaderno de problemas hay más de un caso así resuelto) o mediante cálculos gráficos aproximados. En el supuesto de que, gráfica o analíticamente se conozcan las áreas y los c.d.g. de las figuras de la página anterior ($S1, S2, S3, G1, G2, G3$), es decir, $(Mi \cdot \Gamma) = S1$; $(x' \cdot \Gamma) = S2$; $(x \cdot \Gamma) = S3$; $[Mi \cdot \Gamma] = S1 \cdot d1$; $[x' \cdot \Gamma] = S2 \cdot d2$; $[x \cdot \Gamma] = S3 \cdot d3$; las expresiones anteriores se simplifican del siguiente modo:

$$\mu = \frac{S3 \cdot d3 \cdot S1 - S3 \cdot S1 \cdot d1}{S3 \cdot d3 \cdot S2 - S3 \cdot S2 \cdot d2} L = \frac{S1 \cdot (d3 - d1)}{S2 \cdot (d3 - d2)} L \quad (5')$$

$$\mu' = \frac{S2 \cdot S1 \cdot d1 - S2 \cdot d2 \cdot S1}{S3 \cdot d3 \cdot S2 - S3 \cdot S2 \cdot d2} L = \frac{S1 \cdot (d1 - d2)}{S3 \cdot (d3 - d2)} L \quad (6')$$

Sencillo de aplicación es el caso especial de vigas de sección constante, es decir, cuando $\Gamma = 1$ y no existe modificación de áreas en la página anterior, quedando (basta resolver las integrales de cada caso):

$$(x) = (x') = \frac{L^2}{2} \quad ; \quad (x) = \int x^2 \cdot dx = \frac{L}{3}$$

$$d2 = \frac{L}{3} \quad ; \quad d3 = \frac{2}{3} L \quad ; \quad (x') = \int (L - x)x \cdot dx = \frac{L}{6}$$

$$\mu = \frac{S1 \cdot (d1 - 2L/3)}{(L^2/2)(L/3 - 2L/3)} L = \frac{2 \cdot S1}{L^2} (2L - 3 \cdot d1) \quad (5'')$$

$$\mu' = \frac{S1 \cdot (L/3 - d1)}{(L^2/2)(L/3 - 2L/3)} L = \frac{2 \cdot S1}{L^2} (3 \cdot d1 - L) \quad (6'')$$

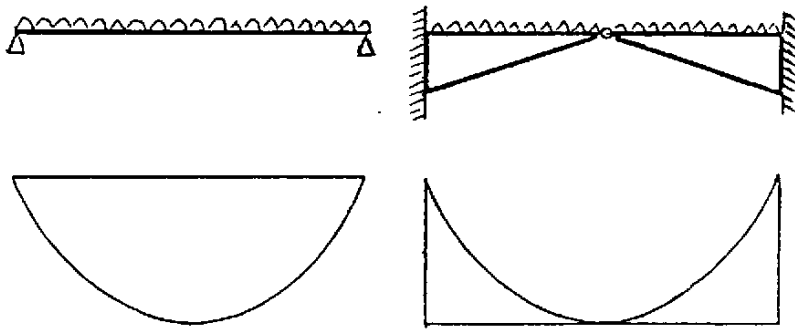
Aunque sea asunto de la Resistencia de Materiales, obsérvese que los valores de μ y μ' dependen, en general, de $I_0/I = \Gamma$, y por lo tanto la distribución del material, algo que no ocurre en el isostatismo (compárense las fórmulas (5) y (6) con las (5'') y (6'')).

Las reacciones finales, evidentemente, por el principio de superposición de efectos, son la suma de las isostáticas e hiperestáticas correspondientes (y estas últimas valen la suma de pares divididas por la luz).

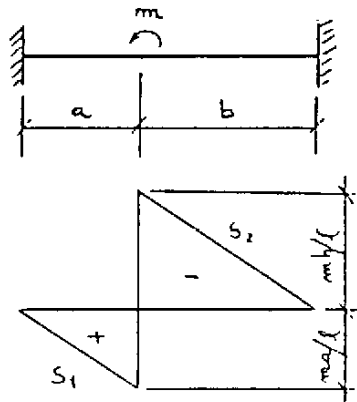
Merece la pena analizar aún más el proceso de cálculo: lo que realmente se ha hecho, desde un punto de vista físico, ha sido considerar el diagrama de momentos isostáticos, M_i , con base en la directriz de la viga, y de un solo sentido en general, desplazarlo posteriormente hasta apoyarse en una nueva directriz, definida en los extremos por las ordenadas de los momentos de empotramiento. Es decir, se ha pasado de tener momentos en un solo sentido, a tener momentos en ambos sentidos, con lo que es evidente que disminuye la ordenada máxima, y por tanto puede disminuirse la sección de la viga; y esto se logra aunque mantengamos la viga de sección constante. Pero si, además, la adaptamos a las condiciones de igual resistencia, acartelándola, obtenemos una menor sección en el

centro (los momentos máximos suelen ser siempre en los extremos).

Y entonces tenemos otros dos efectos favorables: 1°) disminuir el peso propio de la viga, y sus momentos correspondientes, y más en el centro, donde mayor es la influencia; 2°) atracción de los momentos flectores hacia los extremos, como consecuencia de aumentar allí los momentos de inercia (esta atracción supone nuevo desplazamiento ascendente de la directriz de apoyo del diagrama). En el límite se dan los dos casos aquí ilustrados (el de la derecha es la barra de rigidez nula en el centro, desintegrada en dos voladizos de luz mitad):



Respecto de las fórmulas de μ y μ' hay que tener presente que, con diagramas isostáticos a ambos lados de la directriz (momentos positivos y negativos) los valores de $(M_i \cdot \Gamma)$ y de $(M_i \cdot \Gamma')$ se han de calcular con sus signos. Valga un ejemplo aclaratorio:

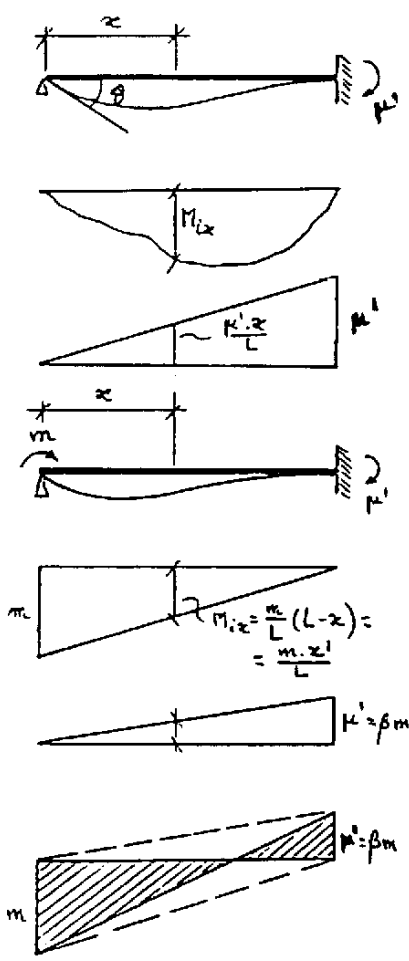


$$S_1 - S_2 = \frac{m \cdot a^2}{2L} - \frac{m \cdot b^2}{2L} =$$

$$= \frac{m}{2L} (a^2 - b^2) = Mx, \text{ etc.}$$

2.4.-

La barra empotrada-apoyada; coeficiente de rigidez y factor de transmisión.-En la viga que ahora nos ocupa,refiriéndonos a las ecuaciones de Möhr, no podremos usar la primera, ($\Theta = 0$), pero sí la segunda (flecha desde A, punto fijo, hasta B nula) y con el valor de $\mu = 0$, sustituyendo en la 4' de la pág.4:



$$\int_0^L \frac{M_i x}{E \cdot I} x \cdot dx - \frac{\mu'}{L} \int_0^L \frac{x^2}{E \cdot I} dx = 0$$

o sea, $(M_i \cdot \Gamma) \cdot L = \mu' \cdot (x \cdot \Gamma) \implies$

$$\mu' = \frac{(M_i \cdot \Gamma)}{(x \cdot \Gamma)} L = \frac{S1 \cdot d1}{S3 \cdot d3} L \tag{4''}$$

Si $I_0/I = 1$, $S3 = L^2/2$, $d3 = 2L/3$

$$\mu' = \frac{3 \cdot S1 \cdot d1}{L^2}$$

Sin embargo,el objeto de estudiar este tipo de barra es avanzar hacia el método de Cross, introduciendo dos conceptos nuevos, que allí se van a emplear constantemente(se ve que desde el punto de vista de cálculo esta barra no aporta realmente nada nuevo).

Sea el caso de la barra que estamos estudiando pero sometida al par exterior m en el apoyo:

$$M_i = \frac{m}{L} (L - x) = \frac{m \cdot x'}{L} \implies \mu' = m \frac{(x' \Gamma)}{(x \cdot \Gamma)} = \beta \cdot m \tag{7}$$

Se observa que el valor de μ' es una fracción de m y de su mismo signo; y que esa fracción es independiente de las acciones exteriores, no dependiendo sino de las

características propias de la barra. Ese valor, que llamaremos β , y que definiremos como coeficiente de transmisión, representa la relación entre el par transmitido y el aplicado. Su cálculo se efectúa deducido de la misma fórmula (7):

$$\beta = \frac{\int_0^L x' \cdot \Gamma \, dx}{\int_0^L x \cdot \Gamma \, dx} = \frac{\int_0^L x \cdot (L - x) \cdot \Gamma \cdot dx}{\int_0^L x^2 \cdot \Gamma \cdot dx} = \frac{S_2 \cdot d_2}{S_3 \cdot d_3} \quad (8)$$

en particular, para $\Gamma = 1$, $\implies \beta = \frac{L/6}{L/3} = \frac{1}{2}$

Si ahora empleamos la primera ecuación de Möhr (ecuación 3' de la pág.4 con $\mu=0$), ésta nos permitirá calcular el ángulo Θ girado en el apoyo y deducir de él otro importante concepto:

$$\Theta = \int_0^L \frac{m \cdot x'}{EIL} \, dx - \int_0^L \frac{m\beta x}{EIL} \, dx = \frac{m}{E \cdot I_0 \cdot L} [(x' \cdot \Gamma) - \beta(x \cdot \Gamma)] \implies$$

$$k = \frac{m}{\Theta} = \frac{E \cdot I_0 \cdot L}{(x' \cdot \Gamma) - \beta(x \cdot \Gamma)} \quad (9)$$

o también, para área y c.d.g. conocidos: $k = \frac{E \cdot I_0 \cdot L \cdot d_3}{S_2(d_3 - d_2)}$

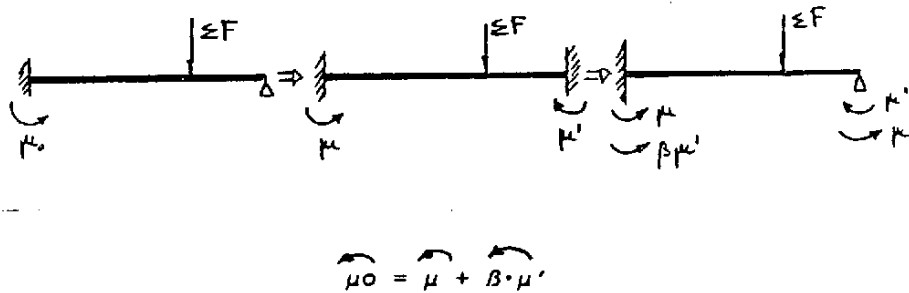
Observamos que la relación entre el momento aplicado y el ángulo correspondiente girado es función, así mismo de las características de la barra, y a esa relación se la denomina coeficiente de rigidez: una gran rigidez necesita un gran momento para una determinada deformación angular, Θ , mientras que una pequeña rigidez será lo contrario. Se verá que expresa el mismo concepto que la rigidez del resorte ($F = k \cdot x$) o que la rigidez más amplia definida en el cálculo matricial.

Para $\Gamma = 1$, queda $k = \frac{E \cdot I_0 \cdot L}{(L^2/2) - (1/2)(L^2/2)} = \frac{4 \cdot E \cdot I_0}{L}$

Para las mismas consideraciones dichas en la barra íntegramente empotrada, resulta evidente aquí el acartelamiento del lado del empotramiento: el diagrama de momentos isostáticos se desplaza, cruzando la directriz, llegando en la ordeada del empotramiento hasta el valor μ' .

Es evidente que disminuyen los momentos flectores en el centro, lo cual nos permite reducir material y momentos flectores del propio peso, pero ahora resulta menos evidente que el momento de empotramiento suele ser el máximo.

Digamos finalmente, que esta viga, en función de los nuevos conceptos introducidos, se puede calcular también por superposición mediante el siguiente esquema:

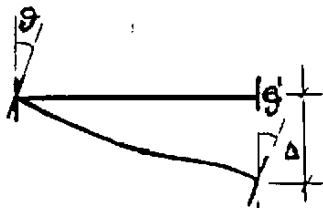


Nota.- Remitimos al alumno a nuestro cuaderno de problemas, en donde se hace un ejemplo práctico, basado en la obra de Fernández Casado, del cálculo de las características de vigas acarteladas (cálculo de los valores de k y β)

2.5.-

La barra con empotramiento elástico: giros y desplazamientos.-

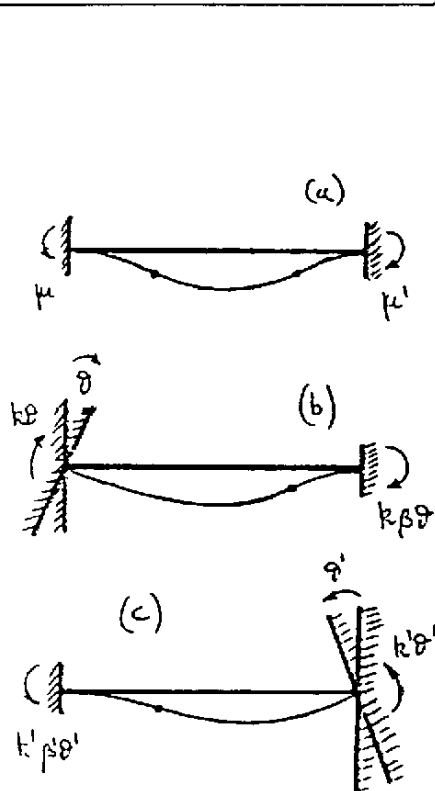
En el método de Cross entra en muchos cálculos, como se verá en su momento oportuno, el estudio de empotramientos no perfectos, sino elásticos; en general, y realmente, éstos serán los empotramientos que más se presentarán en una barra. Al actuar las acciones exteriores sobre una barra, las condiciones de sustentación permitirán ciertos giros o ciertos desplazamientos de las secciones extremas, o ambos casos a la vez, como se observa en la figura adjunta; o incluso,



a veces, la sollicitación exterior podrá ser precisamente giros o desplazamientos (casos de comprobación de una barra, a posteriori, en la que se comprueba ese giro o ese desplazamiento). Ocasiones habrá que esos giros o desplazamientos no sean conocidos, y otras

veces que sí. Supondremos que siempre son datos del problema para facilitar la exposición y en cada caso particular se expondrán las particularidades necesarias. Se estudiarán primero los giros, luego los deslizamientos, y finalmente las acciones simultáneas.

2.6.-

Giros de las secciones de empotramiento.-

sometida a ciertas acciones exteriores; la supondremos en principio perfectamente empotrada, siendo μ y μ' los momentos correspondientes a aquellas acciones (figura a adjunta). Podemos aplicar el método de superposición y realizar el estudio por etapas; en b el empotramiento izquierdo, y por causa de μ , gira un ángulo θ , que equivale a suponer un momento $k\theta$, siendo k la rigidez de ese extremo, y debiendo transmitirse al extremo derecho, según lo visto anteriormente, un momento $k\beta\theta$. Si en el extremo derecho (figura c) por causa del momento μ' , se produce "luego" un giro θ' , equivalente a otro momento $k'\theta'$, se transmitirá a la izquierda el momento $k'\beta'\theta'$ (en general k y k' , β y β' no tienen porqué ser iguales). Puesto que el fenómeno real se produce simultáneamente, habrá que sumar todos los efectos sucesivos.

Aclaremos ya para lo sucesivo que cada rigidez será siempre la relación entre el momento equivalente en la extremidad liberada para girar y el ángulo girado por dicha extremidad; y lo mismo cada factor de transmisión.

Sumando, pues, y considerando signos implícitos (en cada caso, los momentos serán coincidentes en sentido con los giros correspondientes):

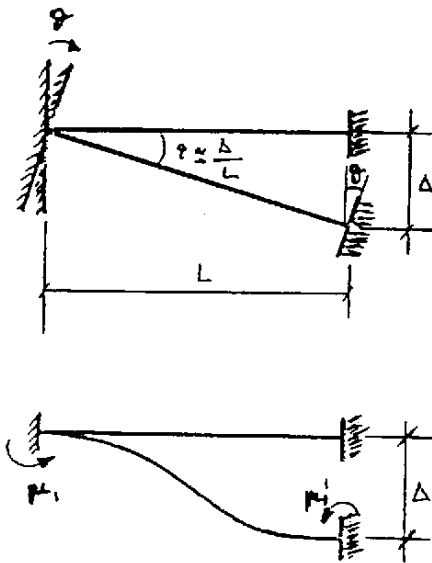
	izquierda	derecha
(a) ==>	μ	μ'
(b) ==>	$k\theta$	$k\beta\theta$
(c) ==>	$k'\beta'\theta'$	$k'\theta'$
total	$M = \mu + k\theta + k'\beta'\theta'$	$M' = \mu' + k\theta\beta + k'\theta'$

Entre k , k' , β y β' existe la relación $k\beta = k'\beta'$, pues, según el teorema de Maxwell, cada producto representa el momento del par que aparece en una extremidad cuando se produce en la opuesta el giro unidad (de todos modos, en vigas simétricas se cumple evidentemente que $k = k'$, $\beta = \beta'$). Por tanto:

$$M = \mu + k(\theta + \beta\theta') \quad M' = \mu' + k'(\theta' + \beta'\theta)$$

2.7.-

Deslizamiento de las secciones de empotramiento.- Aplicando la misma forma de proceder anterior, y resolviendo también por etapas sucesivas, podemos suponer que se realiza primero el deslizamiento sin deformación, girando la barra (primera figura) un ángulo $\theta = \Delta/L$ y reintegrándolos después en otra posterior etapa mediante giros θ en cada extremo, hasta su posición primitiva (segunda figura):



$k\theta$	$k\theta\beta$
$k'\theta\beta'$	$k'\theta$

$$\mu_1 = k\theta + k'\theta\beta' = k\theta + k\theta\beta =$$

$$= k(1 + \beta) \cdot \Delta/L \quad ;$$

análogamente $\mu' = k'(1 + \beta') \cdot \Delta/L$

para vigas de sección constante,

$$\mu = \mu' = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\Delta}{L} = \frac{6E \cdot I \cdot \Delta}{L^2}$$

2.8.-

Caso general.-Si existen giros, Θ y Θ' , y deslizamientos, (relativo entre una extremidad y otra, que iguales deslizamientos en ambos extremos no producen deformación, evidentemente), además de acciones exteriores, que producen momentos de empotramiento perfecto, μ y μ' , tendremos la suma de todos los casos tratados anteriormente:

$$M = \mu + k [\Theta + \beta \Theta' + (1 + \beta) \cdot \Delta / L]$$

$$M' = \mu' + k' [\Theta' + \beta' \Theta + (1 + \beta') \cdot \Delta / L]$$

y en caso de vigas de sección constante

$$M = \mu + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} (\Theta + 1/2 \cdot \Theta' + 3 \Delta / 2L)$$

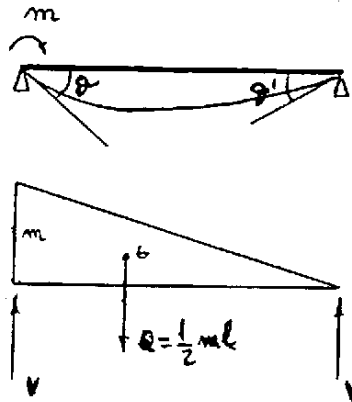
$$M' = \mu' + \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} (\Theta' + 1/2 \cdot \Theta + 3 \Delta / 2L)$$

Recordemos que, conocidos M y M' , la suma de los diagramas de momentos isostáticos (M_i) e hiperestáticos dan el diagrama total; y lo mismo respecto de las reacciones.

Más adelante se estudiará la viga que, unida a un entramado, posee empotramiento semirígido, así como las características más completas de la viga de momento de inercia variable.

2.9.-

La barra doblemente apoyada.- Se pretende aquí solamente ampliar el concepto de rigidez, tal y como antes se ha definido, al caso del apoyo doble; según se estudia en Resistencia de Materiales y por aplicación del método de la viga conjugada, se obtiene



$$\Theta = \frac{V}{E \cdot I} = \frac{\frac{1/2 \cdot ml}{l} \cdot \frac{2}{3} \cdot l}{E \cdot I} = \frac{m \cdot l}{3 \cdot E \cdot I}$$

luego $k = \frac{m}{\Theta} = \frac{3 \cdot E \cdot I}{l} \quad \beta = 0$

2.10.-

Cuadro resumen.- Para uso del alumno, exponemos un resumen de todo lo tratado hasta aquí y para el caso de barras exclusivamente de momentos de inercia constantes ($\Theta = 1, \beta = 1$):

tipo de barra	rigidez	μ y μ'	V y V'
	$k = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L}$ $k' = 0$	$m \quad 0$	$V' = -V = m/l = \frac{3 \cdot E \cdot I}{L^2}$
	$k = \frac{4 \cdot E \cdot I}{L}$ $k' = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$	$m \quad \mu' = \frac{2 \cdot E \cdot I}{L}$	$V' = -V = \frac{3m}{2L} = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$
	$k = k' = \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2}$	$\mu = \mu' = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{L^2}$	$V = -V' = \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3}$

2.11.- Desplazamientos: grado de traslacionalidad.- Como se anunció en la Introducción, pág. 2, el método de Cross analiza si los nudos de la estructura, además de girar por desequilibrio de los distintos momentos actuantes, procedentes de todas las barras que concurren en aquél, se desplazan. Si los nudos se desplazan, es decir, si la estructura o alguna de sus partes se desplazan, la denominaremos traslacional: e intraslacional en caso contrario.

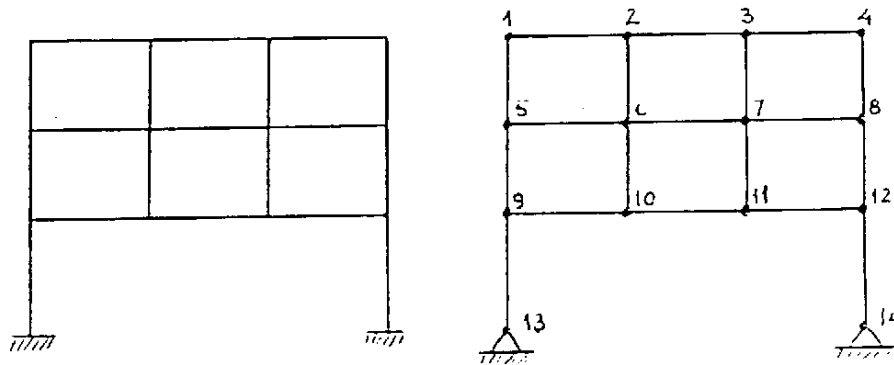
El que una estructura se desplace o no es una característica de la propia estructura, de su concepción, y es independiente de las cargas a que está sometida. Al número mínimo, p , de parámetros del que dependen las posibles traslaciones de todos los nudos se denomina grado de traslacionalidad.

El grado de traslacionalidad de una estructura continua es igual al grado de doformabilidad del mecanismo en que se transforma la estructura al suponer las barras articuladas en sus extremos. Por lo tanto, si la estructura tiene "GL" grados de libertad y "C" coacciones, la diferencia será su grado de traslacionalidad, "GT":

$$GT = GL - C$$

Según que sea $GT > 0$ o $GT < 0$ la estructura será traslacional o intraslacional; en este último caso, al suponer las barras articuladas en sus extremos, se obtiene una estructura no deformable en lugar de un mecanismo.

En un sistema plano cada barra posee tres grados de libertad (x, y, Θ); si el sistema tiene b barras, $GL = 3b$. Cada articulación interna a la estructura, si sobre ella concurren n barras, ejerce $2n - 2 = 2(n - 1)$ coacciones; y si pertenece a una base fija ejerce dos coacciones; el que una estructura tenga barras en voladizo no afecta a sus posibles traslaciones. Así podemos calcular el grado de traslacionalidad de una estructura. Sirva de aclaración el siguiente ejemplo:



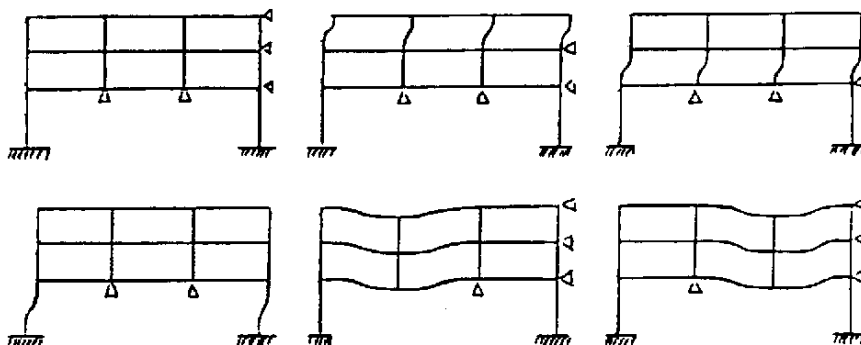
$b = 19 ; GL = 3 \cdot 19 = 57 ;$

$C \implies$ nudos 1 y 4,	$2 \cdot 2(2 - 1) = 4$
" 2,3,5,8,9,10,11 y 12,	$8 \cdot 2(3 - 1) = 32$
" 6 y 7	$2 \cdot 2(4 - 1) = 12$
" 13 y 14	$2 \cdot 2 = 4$

52

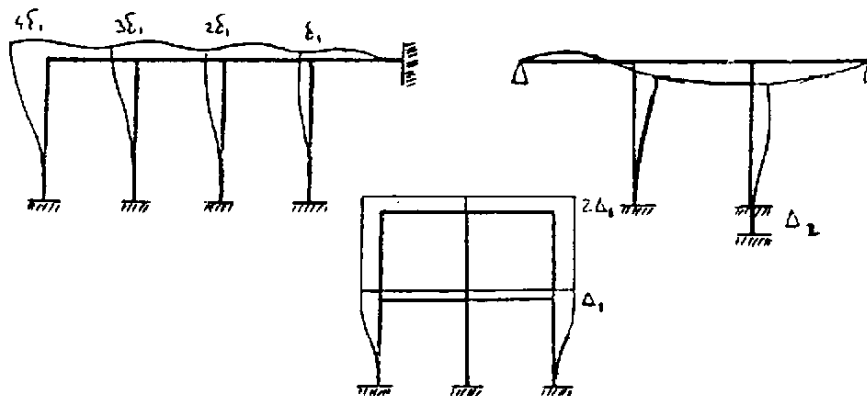
$GT = GL - C = 57 - 52 = 5$

en efecto, los posibles movimientos son:



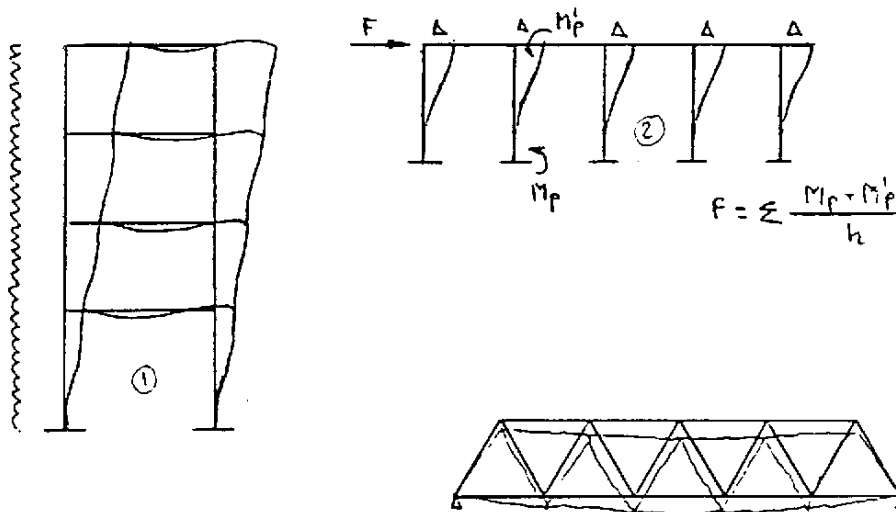
A veces, además de lo que antecede para conocer el grado de traslacionalidad, es conveniente encontrar los posibles desplazamientos, por clasificación según su origen, de una forma práctica:

1º).-Desplazamientos conocidos a priori (variaciones de temperatura, asentos de apoyos, retracción en el fraguado del hormigón, etc.).



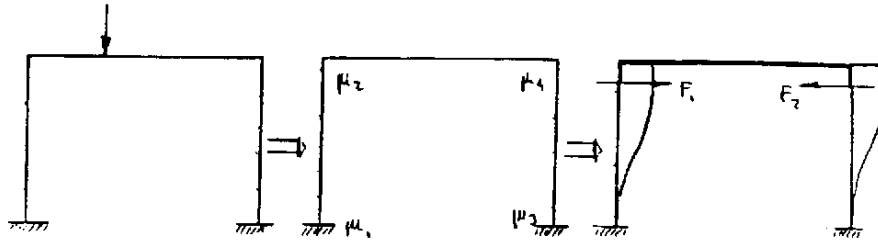
Digamos que son datos de cada problema, valiendo los momentos a causa de tales desplazamientos $\mu = \mu' = 6EI / L^2$. Y digamos también, viendo los ejemplos de la página anterior, que se comenzará por considerar momentos locales en ciertas barras, aquellas que sufren flexión "diréctamente"; claro que, como veremos, todas las demás barras resultarán afectadas "física o indirectamente", por la solidaridad del conjunto y se introducirán las ecuaciones analíticas correspondientes.

2°).-Desplazamientos desconocidos, pero dependiendo diréctamente de las fuerzas exteriores (por ejemplo, desplazamientos laterales por la acción del viento); o bien dependiendo de esfuerzos canalizados por la estructura (es decir, como consecuencia de variaciones de longitud en barras de la propia estructura).



En los dos ejemplos primeros es ciertos que hay tracciones y compresiones, pero podemos considerar que en una primera etapa hay desplazamientos y, como consecuencia, habrá luego acortamientos y alargamientos; mientras que en el ejemplo de la derecha los acortamientos y alargamientos ocurren "diréctamente", como consecuencia de las fuerzas, y los desplazamientos son realmente consecuencia de las tracciones y compresiones; además, en este caso se determinan primero los esfuerzos longitudinales (Cremona o similar) y luego los desplazamientos.

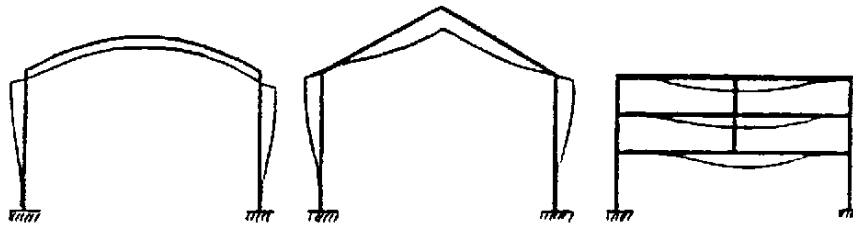
3°).-Desplazamientos laterales de una estructura por no haber simetría geométrica o elástica; se ve en el ejemplo siguiente:



$$\mu_1, \mu_2 = \mu_3, \mu_4$$

$$F_1 = \frac{\mu_1 + \mu_2}{h}, \quad F_2 = \frac{\mu_3 + \mu_4}{h}, \quad F_1 = F_2, \quad F_1 - F_2 = T$$

4°).-Finalmente, desplazamientos por barras curvas o combinaciones de barras rectas que equivalen a estructura en arco; o por falta de apoyos.



2.12.-

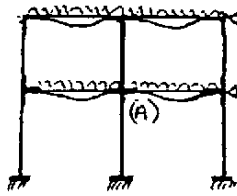
Exposición del método de Cross (método indirecto).-Como se ha dicho, el método de Cross no es un método aproximado; sino un método que va transponiendo lo físico a lo matemático por etapas y por reiteración.

Se parte de una estructura virtual con nudos absolutamente rígidos, calculando los momentos de las cargas exteriores (sin giros ni desplazamientos), es decir, los llamados momentos de empotramiento perfecto; llegando luego a la estructura real, deshaciendo por etapas esa rigidez, permitiendo sucesivamente los giros y los desplazamientos.

En general, se consideran cuatro etapas, aunque a menudo serán suficientes dos, dependiendo del carácter intraslacional de la estructura; en seguida se irán viendo los diferentes modos de operar.

2.12.1.

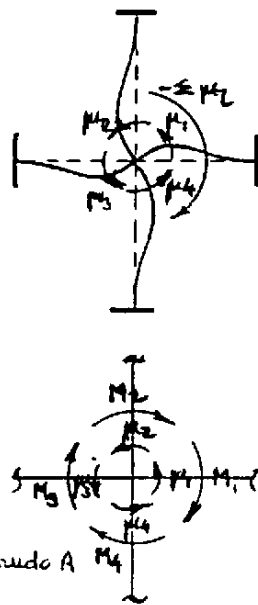
Etapla primera.-“Nudos absolutamente rígidos y sin desplazamientos en toda la estructura”. Las barras se consideran completa-



mente incomunicadas y en condiciones de empotramientos perfecto en sus dos extremos. El cálculo se limita al de los momentos de empotramiento perfecto debidos a las cargas exteriores. Lógicamente, si no hay acciones exteriores propiamente dichas, sino acciones indirectas (viento, por ejemplo), aumento de temperatura, asientos, etc., esta primera etapa y la segunda no existirán ($\mu = \mu' = 0$ en todas las barras).

2.12.2.

Etapa segunda.- "Nudos en libertad de giros pero con desplazamientos impedidos". Es decir, se van a permitir los giros pero no los desplazamientos; y se van a liberar sucesiva y cíclicamente hasta alcanzar el equilibrio definitivo.



Al liberar un cierto nudo, el A, por ejemplo, de la figura anterior y al considerar restablecida la intercomunicación entre sus barras, ocurrirá normalmente que la suma de momentos en el nudo no sea nula ($\Sigma\mu_i = 0$ en general) y el nudo girará buscando el equilibrio y en el sentido que le imponga tal suma. Evidentemente, si $\Sigma\mu_i = 0$, no habrá giro en ese nudo determinado.

El giro del nudo concluirá cuando se haya restablecido el equilibrio, cuando la suma de momentos vuelva a ser nula; lo cual indica el considerar un momento equilibrante de valor $-\Sigma\mu_i = M_t$, que significa físicamente la aparición de unos momentos resistentes en cada barra del nudo, M_i , y cuya suma es la oponente, $\Sigma M_i = M_t = -\Sigma\mu_i$. Pero, debido a la indeformabilidad del propio nudo, todas las barras girarán el mismo ángulo, θ . Y cada momento M_i de barra estará ligado con el ángulo girado mediante su propia rigidez, k_i , de tal modo que $M_i = k_i \cdot \theta$; bastará ahora realizar un reparto proporcional

$$M_1 = k_1 \cdot \theta$$

$$M_2 = k_2 \cdot \theta$$

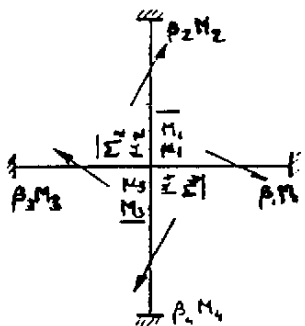
.....

$$M_i = \frac{-\Sigma\mu_i}{\Sigma k_i} \cdot k_i = -\Sigma\mu_i \cdot r_i, \text{ siendo}$$

$$r_i = \frac{k_i}{\Sigma k_i}$$

$$\Sigma M_i = -\Sigma\mu_i = \theta \cdot \Sigma k_i$$

Los distintos r_i se denominan coeficientes de reparto y está claro que $\sum r_i = 1$ en cada nudo, siendo los números por los que se ha de multiplicar cada $-u_i$ para obtener el equilibrante de cada barra en el nudo considerado.



No obstante, con ésto no concluye la etapa, sino que solamente queda equilibrado el nudo tratado; la actuación de estos momentos, M_i , en cada barra implica la aparición de otros, transmitidos, en los extremos opuestos de cada una y de valor $\beta_i \cdot M_i$; por consiguiente, una vez equilibrados todos los nudos y transmitidos todos los correspondientes a los extremos, los nudos restarán nuevamente desequilibrados, lo cual obligará a nuevos reequilibrios y transmisiones, en una sucesión físico-matemática, que se demuestra convergente.

Respecto al orden práctico, puede equilibrarse primero y transmitir después, o ir equilibrando y transmitiendo sucesivamente, de nudo a nudo, comenzando por el más desequilibrado, y en un cierto orden organizativo; es decir, teniendo en cuenta en cada nudo no solo los momentos que proceden de la etapa primera, sino los transmitidos de nudos anteriores. Este segundo procedimiento es de más rápida convergencia.

Si la estructura fuese intraslacional, al no existir desplazamientos, con el final cíclico de esta segunda etapa, alcanzando el grado de aproximación requerido, termina el proceso. Por lo tanto, se ha debido comprobar antes del comienzo si $GT < 0$. Además de calcular previamente, y para esta segunda etapa y las siguientes, si las hubiere, las rigideces y coeficientes de reparto y transmisión de toda la estructura.

Supuesto $GT > 0$, es decir, la estructura traslacional, se ha de pasar a la siguiente etapa:

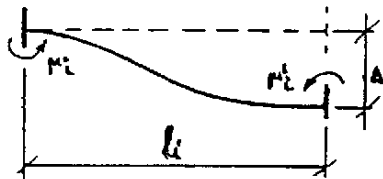
1.12.3.

Etapa tercera: estado fundamental y estados paramétricos
 .-"Nudos desplazables, pero no giratorios". Van a permitir el desplazamiento de los nudos pero de tal modo que las barras en sus empotramientos se mantengan paralelas a sí mismas. Es decir, se van a presentar desplazamientos locales y sus correspondientes "momentos de empotramiento local". Desde el punto de vista físico esta etapa tercera es idéntica a la primera ya estudiada: en la primera se consideraban acciones exteriores y los momentos que producían, en la tercera se consideran los desplazamientos y los momentos que producen. Y,

adelantando ideas, la segunda y cuarta serán físicamente equivalentes, permitiendo cada una de ellas los giros de los nudos de las etapas anteriores respectivas.

Volviendo a los desplazamientos, y una vez estudiado el grado de traslacionalidad, de la clasificación realizada más atrás (págs. 16 a 19) se ve que pueden agruparse, a su vez y a efectos de esta etapa, en: unos originados por deformaciones longitudinales (variaciones térmicas, retracciones o esfuerzos longitudinales), otros por deformaciones transversales (por propios desplazamientos, pero sin cambio de longitud en las barras).

En realidad, el modo de proceder en ambos casos será el mismo, como en seguida se verá. Pero para



el primer grupo los momentos locales se calculan sin dificultad: las deformaciones longitudinales afectan transversalmente a otras barras (por sencillas consideraciones geométricas) y, entonces, basta aplicar:

$$\mu_i = \mu_i' = k(1 + \beta) \frac{\Delta}{l_i} ; \text{ y para } \Gamma = 1, \mu_i = \mu_i' = \frac{6 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{l_i^2} \quad (10)$$

Para el segundo grupo se debe aclarar primeramente que la hipótesis de intraslacionalidad considerada en las etapas primera y segunda equivale, en realidad, a introducir unos apoyos ficticios, que impidan tales desplazamientos. Puesto que el método de Cross procede por etapas, lo que se considera es el estado real de la estructura descompuesta en una serie de estados componentes, sumados por superposición; véase el ejemplo superior de la pág. 17, en donde se analizan los posibles movimientos.

En aquellas figuras la primera es el llamado estado fundamental: se consideran solo las acciones exteriores (no dibujadas) sobre la estructura, a la cual se le ha impedido toda traslación de sus nudos; está claro que el impedimento se ha conseguido con apoyos virtuales, sobre los cuales se habrán acumulado acciones de reacción a determinar; y habrá tantos apoyos como sea el grado de traslacionalidad (cinco en nuestro referido ejemplo).

Los restantes estados son los llamados estados paramétricos, uno por cada apoyo virtual. Si cada desplazamiento $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_p$ se considera de valor arbitrario, desconocido

en principio, el estado real, E_r , será, por el ya dicho método de superposición, la suma del estado fundamental, $E(II)$, y de los paramétricos, $E(IV')$, $E(IV'')$,....., afectados de ciertos coeficientes de proporcionalidad, α , β ,.....; es decir:

$$E_r = E(II) + \alpha \cdot E(IV') + \beta \cdot E(IV'') + \dots\dots\dots$$

y lo mismo los momentos correspondientes, $M_r = M(II) + \alpha \cdot M(IV') + \beta \cdot M(IV'') + \dots\dots\dots$, en donde se ha adoptado una nomenclatura paralela: M_r , $M(II)$, $M(IV')$, $M(IV'')$ son los momentos de extremo del estado real, del fundamental y de los paramétricos respectivos.

El estado fundamental, etapas primera y segunda ya estudiados, se calcula, al considerar la estructura intraslacional, mediante las cargas exteriores y los correspondientes momentos de empotramiento perfecto y luego la libertad de giros.

Para el cálculo de los momentos paramétricos procederemos también mediante dos etapas, similares a las dos primeras, como se dijo más arriba: en esta tercera etapa se han de suprimir los apoyos ficticios; o lo que es lo mismo, dejar en libertad las fuerzas acumuladas contra esos apoyos. Entonces se trasladarán los nudos, produciéndose desplazamientos relativos, que, como estamos en la hipótesis de movimientos locales, sin giros, equivalen a movimientos relativos de las secciones extremas.

Si conociéramos los desplazamientos δ_1 , δ_2 ,....., δ_p , tendríamos exactamente los momentos locales (fórmulas (10)); pero en la mayor parte de las ocasiones ni se conocen esos desplazamientos a priori, ni interesan.

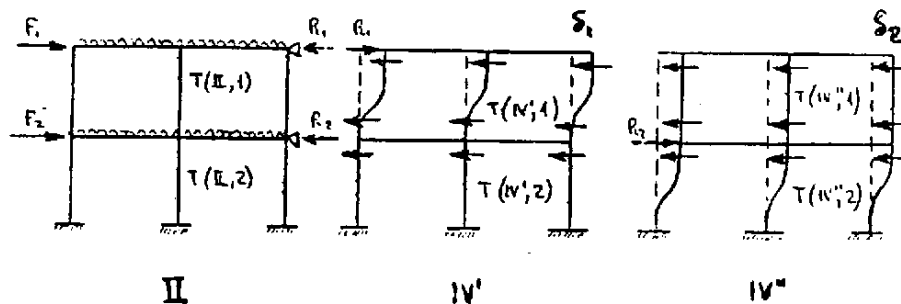
En esta etapa tomaremos unos desplazamientos ficticios, proporcionales a los coeficientes desconocidos α , β ,.....; y en la cuarta volveremos a dejar en libertad de giros, semejante a la segunda. Las ecuaciones de desplazamientos que allí plantearemos expresarán que la estructura, alcanzada su posición de equilibrio, habrá anulado las fuerzas de apoyo, tal y como se explicó en el equilibrio de los nudos.

En la práctica, y para el método indirecto (*), se van liberando los nudos uno cada vez, sucesiva e independientemente, constituyendo cada liberación un estado paramétrico; y se van calculando todos los momentos locales por consideraciones geométricas de la estructura, en función cada estado del correspondiente α , β ,.....

(*).-Se explica este método por ser el de más fácil asimilación.

- 2.12.4. Etapa cuarta.- Como se dijo, esta etapa es equivalente desde el punto de vista físico a la segunda; es decir, se vuelven a dejar en libertad de giros los nudos de la estructura, que estarán en general desequilibrados después de calculados los desplazamientos; y habrá que realizar tantas etapas cuarta, de equilibrados de nudos, como estados paramétricos haya, una por cada estado (repetimos que cada etapa de estas cuarta es independiente de las demás).

Un ejemplo aclarará la forma de plantear las ecuaciones, al mismo tiempo que justificará su porqué físico:



Se han representado por $T(II,1)$ y $T(II,2)$ los momentos finales de la etapa segunda y en cada piso; R_1 y R_2 representan las fuerzas de reacción contra los apoyos ficticios.

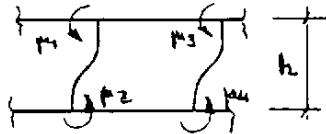
De forma similar, IV' es el primer estado paramétrico y IV'' el segundo; y se han representado los momentos finales correspondientes. Alcanzado el equilibrio en cada estado, cada uno se ha desplazado por la acción de su correspondiente R_i . Por superposición, y considerando las fuerzas de corte de cada piso:

$$\text{piso } 1^\circ \implies F_1 + \Sigma T(II,1) + \alpha \cdot \Sigma T(IV',1) + \beta \cdot \Sigma T(IV'',1) = 0$$

$$\text{piso } 2^\circ \implies F_2 + \Sigma T(II,2) + \alpha \cdot \Sigma T(IV',2) + \beta \cdot \Sigma T(IV'',2) = 0$$

En general, se resolverá un sistema de p ecuaciones (una por cada acción de corte, sean "pisos" reales o direcciones contra apoyos) con p incógnitas (cada coeficiente de proporcionalidad α, β, \dots).

Las acciones de corte en cada caso se recuerda que son siempre de la forma



$$T = \Sigma \frac{\mu_1 + \mu_2}{h} + \frac{\mu_3 + \mu_4}{h} + \dots$$

Resuelto el sistema y hallados α, β, \dots , los momentos finales son, evidentemente, como se dijo

$$M_r = M(II) + \alpha \cdot M(IV') + \beta \cdot M(IV'') + \dots$$

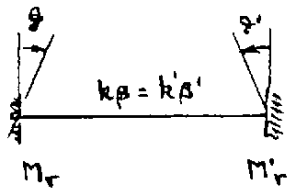
En la actualidad, con el uso de programas especiales de cálculo, no tiene dificultad la resolución de los sistemas de ecuaciones, que en otras épocas se habían de resolver por aproximaciones sucesivas.

2.12.5.

Comprobaciones finales.— En el método de Cross pequeños errores de cálculo (en la transmisión o en el equilibrado) influyen generalmente poco y suelen quedar compensados en el proceso global. No obstante, son convenientes algunas comprobaciones, que aseguran el resultado correcto y aun sirven para conocer la aproximación lograda.

1°) En primer lugar, han de anularse en cada nudo la suma algebraica de todos los momentos extremos de barra. Si esto se verifica, la repartición ha sido correcta, pero puede no ser suficiente.

2°) Pudiera haber habido errores en los traslados; una nueva comprobación la tendremos en la igualdad de ángulos en cada nudo, en los ángulos girados por cada barra (y, por tanto, por el nudo). Se comprueba así:



$$M = \mu + k \cdot \Theta + k' \Theta' \beta = \mu + k \cdot (\Theta + \Theta' \cdot \beta)$$

$$M' = \mu' + k' \Theta' + k \Theta \cdot \beta = \mu' + k' (\Theta' + \Theta \cdot \beta')$$

resolviendo:

$$M - \mu = k \cdot \Theta + k \cdot \beta \cdot \Theta'$$

$$M' - \mu' = k' \cdot \beta' \cdot \Theta + k' \cdot \Theta'$$

$$\Theta = \frac{\begin{vmatrix} M - \mu & k \cdot \beta \\ M' - \mu' & k' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k & k \cdot \beta \\ k' \beta' & k' \end{vmatrix}} = \frac{(M - \mu) \cdot k' - (M' - \mu') \cdot k \cdot \beta}{k \cdot k' \cdot (1 - \beta \cdot \beta')} \quad k \cdot \beta$$

$$\Theta = \frac{(M - \mu) - (M' - \mu') \beta'}{k(1 - \beta \cdot \beta')}$$

3°) Finalmente, para comprobar si se ha resuelto bien el problema de los desplazamientos, basta cortar por cualquier dirección, viendo si existe equilibrio entre fuerzas actuantes y esfuerzos transversales.