

ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES.

# ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES.

Javier Pajon Permuy.

Cita:

Javier Pajon Permuy (1998). *ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES*.  
ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/12>

ARK: <https://n2t.net/ark:/13683/pvp3/Uzx>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.  
Para ver una copia de esta licencia, visite  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

*Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <https://www.aacademica.org>.*

# ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

Cita: Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio (1999). *ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES*. LECCIONES Y APUNTES DE MECÁNICA GENERAL: ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES.

Dirección estable: <https://www.aacademica.org/javier.pajon.permuy/11>



Esta obra está bajo una licencia de Creative Commons.

Para ver una copia de esta licencia, visite

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.es>.

*Acta Académica es un proyecto académico sin fines de lucro enmarcado en la iniciativa de acceso abierto. Acta Académica fue creado para facilitar a investigadores de todo el mundo el compartir su producción académica. Para crear un perfil gratuitamente o acceder a otros trabajos visite: <http://www.aacademica.org>.*

**UNIDAD DIDÁCTICA II:  
ESTÁTICA.**

**TEMA XII**

**ESTÁTICA DE LOS CUERPOS FUNICULARES**

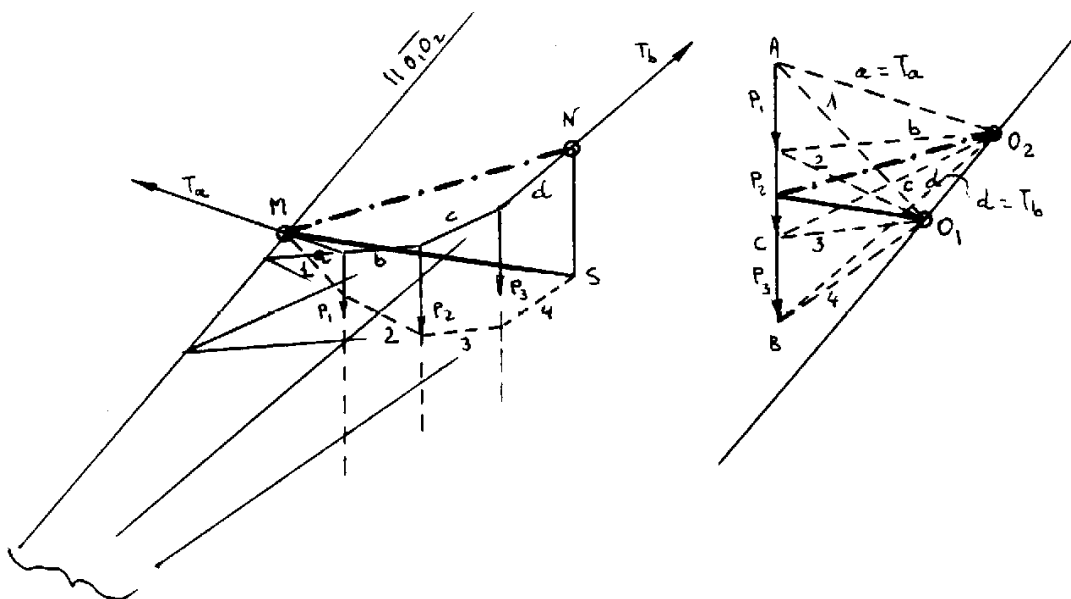
**12.1.- Introducción.**

Llamaremos cuerpos funiculares a los que, teniendo una longitud grande comparada con sus secciones transversales, sólo pueden adoptar configuraciones de equilibrio tales que dichas secciones transversales estén sometidas a esfuerzos de tracción (hilos, correas, cables, cadenas).

Heremos la hipótesis de que, una vez que han llegado a su posición de equilibrio, se transforman en cuerpos rígidos. Esto es lo que se considera y denomina "principio de solidificación".

**12.2.- Polígono funicular.**

Se dibuja un ejemplo y solamente se dan unas breves indicaciones:



M y N son los puntos de amarre del cable funicular. Se elige un polo arbitrario, O1, y su polígono pasaría por  $\overline{MS}$ , paralela a  $\overline{OI-C}$ , (líneas gruesas ambas) y estando S en la perpendicular por N; C divide a la suma de vectores  $P1 + P2 + P3 = AB$  en los dos vectores reacciones verticales en los amarres; cualquier punto, O2, de la paralela a  $\overline{MN}$  (en trazo y punto ambas) cumple la condición de pasar el funicular por  $\overline{MN}$ ; como existen infinitas soluciones, se ha de fijar otra condición (tensión máxima, Td, por ejemplo); las reacciones en los amarres tienen las direcciones del funicular, a y d. En la recta paralela a  $\overline{OI-O2}$  por M se cortan todos los pares 1-a, 2-b, 3-c, etc.. No damos demostración de cuanto antecede, que el alumno puede encontrar en obras especializadas de Grafostática.

### 12.3.- Ecuaciones fundamentales del equilibrio de un cable.

Sea 1 - 2 un trozo diferencial de cable, longitud ds, sometido a una acción vertical unitaria, W (su propio peso u otra acción exterior, peso por unidad de longitud). Sean T1 y T2 las tensiones extremas; el equilibrio de fuerzas plantea:

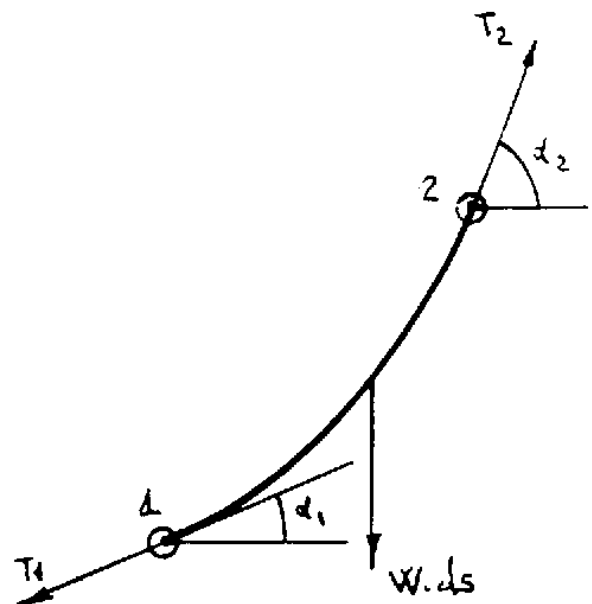
$$\cos \alpha_i = \frac{dx}{ds} \quad ; \quad \text{sen } \alpha_i = \frac{dy}{ds}$$

$$\sum y = 0 \implies$$

$$= 0 \quad \left[ \begin{array}{c} T \cdot \frac{dy}{ds} \\ \end{array} \right]_2 - \left[ \begin{array}{c} T \cdot \frac{dy}{ds} \\ \end{array} \right]_1 - W \cdot ds$$

$$\sum x = 0 \implies$$

$$\left[ \begin{array}{c} T \cdot \frac{dx}{ds} \\ \end{array} \right]_2 - \left[ \begin{array}{c} T \cdot \frac{dx}{ds} \\ \end{array} \right]_1 = 0$$



Puesto que hemos escrito diferencias entre puntos infinitamente próximos, tales diferencias las podemos considerar como incrementos o diferenciales; en la primera línea que sigue resolvemos la derivada de "y" respecto a "s" por intermedio de "x"; y en la segunda, al ser la diferencial nula, significa que proviene de la diferenciación de una constante, que denominaremos H y que más adelante aclararemos su significado:

$$\begin{array}{l}
 \left[ \begin{array}{c} dy \\ T \cdot \frac{dy}{ds} \end{array} \right] = W \cdot ds \\
 \\
 \left[ \begin{array}{c} dx \\ T \cdot \frac{dx}{ds} \end{array} \right] = 0
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{d}{ds} \left[ \begin{array}{c} dy \\ T \cdot \frac{dy}{ds} \end{array} \right] = W \quad ; \quad \frac{d}{ds} \left[ \begin{array}{c} dy \quad dx \\ T \cdot \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} \end{array} \right] = W \\
 \\
 \boxed{ \begin{array}{c} dx \\ T \cdot \frac{dx}{ds} = H \end{array} } \quad [1]
 \end{array}$$

Considerando la expresión [1] en la última fórmula de la línea anterior, teniendo en cuenta el valor constante de H, resulta finalmente:

$$\boxed{ \frac{d}{ds} \left[ \begin{array}{c} dy \\ dx \end{array} \right] = \frac{W}{H} } \quad [2]$$

Ambas fórmulas [1] y [2], juntamente con la longitud de un elemento diferencial de curva, [3], van a constituir las fórmulas fundamentales del cálculo de los elementos funiculares (ver página siguiente):

$\left[ T \cdot \frac{dx}{ds} = H \right] \quad [1]$	$\left[ T \cdot \frac{dx}{ds} = H \right] \quad [1']$
$\left[ \frac{d}{ds} \left[ \frac{dy}{dx} \right] = \frac{W}{H} \right] \quad [2]$	$\left[ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W_0}{H} \right] \quad [2']$
$\left[ s = \int_S \sqrt{1 + \left[ \frac{dy}{dx} \right]^2} dx \right] \quad [3]$	$\left[ [3] = [3'] \right] \quad [3']$

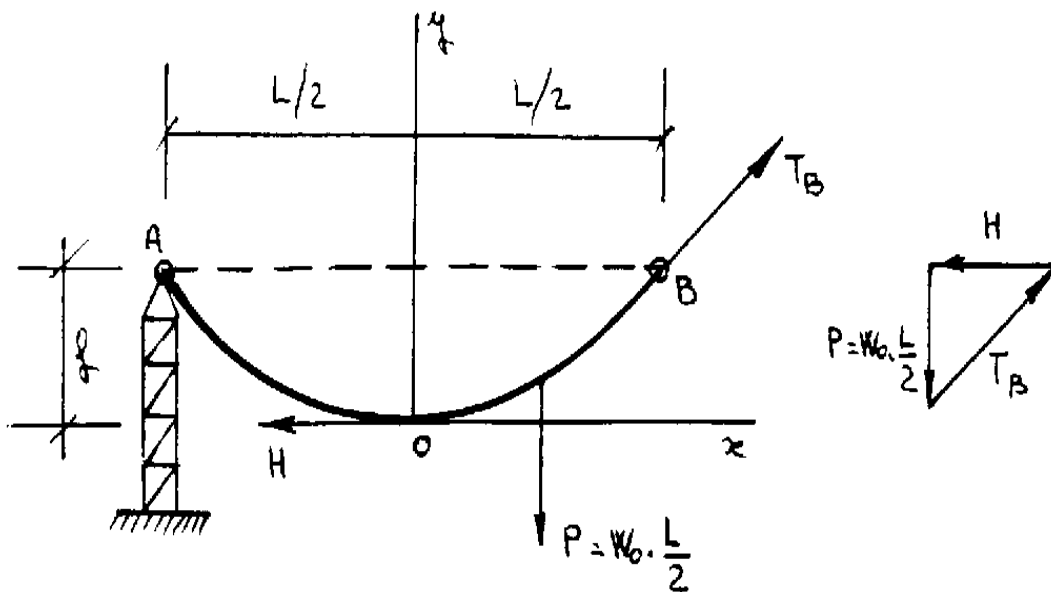
Se aclara que el cuadro de la derecha se ha obtenido para el uso (aproximado) en que se consideren fuerzas verticales,  $W$ , no por unidad de longitud de cable, sino en proyección horizontal; es decir:

$$W \cdot ds \approx W_0 \cdot dx$$

Este caso se aplica en la práctica con suficiente aproximación cuando se considera solamente el peso propio del cable (o cargas pequeñas) y la flecha es pequeña comparada con la luz (grandes vanos); y siempre en el caso de fuerzas repartidas a lo largo de la horizontal.

### 12.4.- Cable sometido a carga uniformemente repartida en proyección horizontal.

Partimos de las ecuaciones [1'], [2'] y [3'], como acabamos de explicar:



$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{H} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{H} \cdot x + a \quad ; \quad y = \frac{w_0}{2 \cdot H} \cdot x^2 + a \cdot x + b$$

Según los ejes elegidos, las constantes "a" y "b" valen cero, puesto que para  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $dy/dx = 0$ ; quedando en este caso la ecuación de la parábola:

$$y = \frac{w_0 \cdot x^2}{2 \cdot H} \quad \quad \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{w_0 \cdot x}{H}$$

### 12.4.1.- Amarres a la misma altura.

Es el caso de la figura anterior; denominando "f" a la flecha máxima y "L" a la longitud entre apoyos, deducimos de la ecuación última:

$$f = \frac{W_0 \cdot L^2}{8 \cdot H} \quad \text{o bien} \quad \boxed{H = \frac{W_0 \cdot L^2}{8 \cdot f}} \quad [4]$$

El peso en la mitad de la parábola será  $P = W_0 \cdot [L/2]$ ; en el equilibrio de esa mitad, si llamamos "H" a la tensión horizontal y tomamos momentos respecto del punto B de la figura superior:

$$P \frac{L}{4} = H \cdot f = W_0 \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} = \frac{W_0 \cdot L^2}{8} \quad ; \quad H = \frac{W_0 \cdot L^2}{8 \cdot f}$$

Lo cual nos indica que la constante "H" de la fórmula [4], que provenía de la constante de integración, coincide precisamente con la tensión horizontal en el origen de coordenadas de la parábola.

Del polígono de fuerzas (figura anterior, derecha) y de esa mitad de la parábola se deduce:

$$T_B = \sqrt{H^2 + P^2} = \sqrt{H^2 + \left[ W_0 \cdot \frac{L}{2} \right]^2} = \sqrt{\frac{W_0^2 \cdot L^2}{64 \cdot f^2} + \frac{W_0^2 \cdot L^2}{4}}$$

$$\boxed{T_B = \frac{W_0 \cdot L}{8} \sqrt{\frac{L^2}{f^2} + 16}} \quad [5]$$



La longitud total del cable,  $s$ , se obtiene integrando la ecuación [3], integración que es bastante complicada y para la cual remitimos al alumno a obras especializadas; el resultado final, expresado como desarrollo en serie, es el siguiente:

$$s = 2 \cdot \int ds = 2 \cdot \int_0^{L/2} \sqrt{1 + [dy/dx]^2} dx \quad ; \quad \text{integrando:}$$

$$s = L \cdot \left[ 1 + \frac{8}{3} \cdot \left[ \frac{f}{L} \right]^2 - \frac{32}{5} \cdot \left[ \frac{f}{L} \right]^4 + \frac{256}{7} \cdot \left[ \frac{f}{L} \right]^6 - \dots \right] \quad [6]$$

En la práctica bastará con tomar los tres primeros términos; y aun para líneas eléctricas los dos primeros.

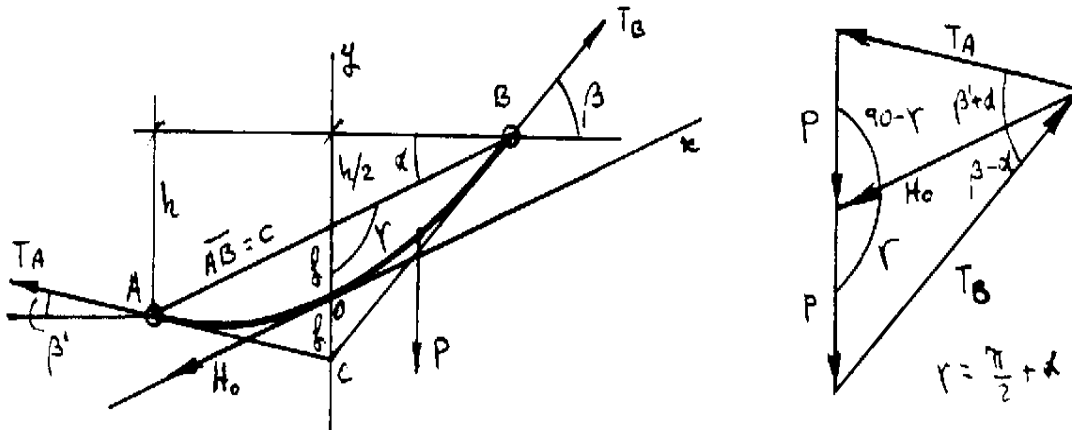
Otra fórmula que podemos utilizar, con mas exactitud es la siguiente:

Siendo  $a = H/W_0$ .

$$s = L \ln \left[ \left[ \frac{\sqrt{4a^2 + 1} + 1}{2a} + \frac{1}{2a} \right] \cdot \text{sen } a \right] + \frac{L\sqrt{4a^2 + 1}}{4a}$$

### 12.4.2.- Amarres a distinta altura, ejes según direcciones conjugadas.

Está basado el cálculo en las propiedades de las direcciones conjugadas, que se estudian en geometría. Dichas direcciones serán los nuevos ejes coordenados, que evidentemente no lo serán rectangulares, sino formando entre sí un determinado ángulo.



Llamaremos luz, "L", a la distancia en horizontal entre amarres, y "h" al desnivel, tal que, como se ve en la figura anterior,  $AB = c = \sqrt{L^2 + h^2}$ .

Los ejes son los indicados en la misma figura, la perpendicular por la mitad de la luz y la tangente en O, que es la dirección conjugada de tal perpendicular. También ahora se cumple que el peso en proyección horizontal es  $P = W_0 \cdot x$ ; y siendo la flecha la indicada, se demuestra en geometría que se cumple que  $OC = f$ . En cambio, H no es la tensión horizontal del caso primero, sino la tensión en la dirección conjugada, que denominaremos  $H_0$  para diferenciarla de la horizontal. Finalmente, se demuestra que se sigue cumpliendo:

$$y = \frac{W_0 \cdot x^2}{2 \cdot H_0} \quad ; \quad f = \frac{W_0 \cdot c^2}{8 \cdot H_0} = \frac{W_0 \cdot [L^2 + h^2]}{8 \cdot H_0}$$

$$H_0 = \frac{W_0 \cdot [L^2 + h^2]}{8 \cdot f} \quad [7]$$

La tensión horizontal valdrá, evidentemente:  $H = H_0 \cdot \cos \alpha$

Se han dibujado también en la última figura los triángulos de tensiones (uno por cada mitad de la parábola, y adyacentes el uno del otro); las tensiones de amarres se calculan de dichos triángulos:

$$\cos \alpha = \frac{L}{\sqrt{H^2 + L^2}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2 \cdot f + [h/2]}{L/2} = \frac{4 \cdot f + h}{L}$$

$$; \quad \operatorname{tg} \beta' = \frac{2 \cdot f - [h/2]}{L/2} = \frac{4 \cdot f - h}{L}$$

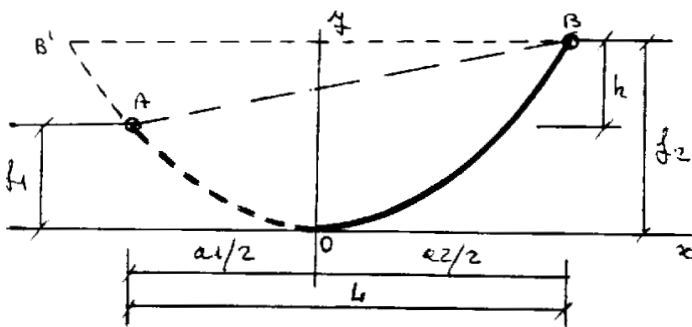
$$\frac{TB}{\operatorname{sen} \Gamma} = \frac{P}{\operatorname{sen} (\beta - \alpha)} \quad ; \quad \frac{T}{B} = \frac{P \cdot \operatorname{sen} \Gamma}{\operatorname{sen} (\beta - \alpha)} = \frac{P \cdot \cos \alpha}{\operatorname{sen} (\beta - \alpha)} \quad \text{====>}$$

$$\boxed{\frac{T}{B} = \frac{W_0 \cdot \sqrt{L^2 + h^2} \cos \alpha}{2 \cdot \operatorname{sen} (\beta - \alpha)}} \quad [8]$$

$$\frac{TA}{\cos \Gamma} = \frac{P}{\operatorname{sen} (\beta' + \alpha)} \quad ; \quad \boxed{\frac{T}{B} = \frac{W_0 \cdot \sqrt{L^2 + h^2} \cos \alpha}{2 \cdot \operatorname{sen} (\beta' + \alpha)}} \quad [9]$$

### 12.4.3.- Amarres a distinta altura, ejes coordenados ortogonales.

Se puede utilizar el primer caso, refiriendo los ejes ortogonales al punto más bajo, tangente horizontal, y considerando dos semiparábolas de semiluces respectivas " $a_1/2$ " y " $a_2/2$ ", con flechas respectivas  $f_1$  y  $f_2$ , y siendo el desnivel  $h = f_2 - f_1$ :



$$f_1 = \frac{W_0 \cdot a_1^2}{8 \cdot H}$$

$$f_2 = \frac{W_0 \cdot a_2^2}{8 \cdot H}$$

$$h = f_2 - f_1 = \frac{W_0 \cdot a_2^2 - W_0 \cdot a_1^2}{8 \cdot H} = \frac{W_0 \cdot (a_2 - a_1) \cdot L}{4 \cdot H} \implies$$

$$a_2 - a_1 = \frac{4 \cdot H \cdot h}{W_0 \cdot L}$$

$$a_2 + a_1 = 2 \cdot L$$

resolviendo el sistema:

$$a_2 = L + \frac{2 \cdot H \cdot h}{W_0 \cdot L}$$

$$a_1 = L - \frac{2 \cdot H \cdot h}{W_0 \cdot L}$$

Sustituyendo ambos valores en la anterior fórmula [6], pero limitándola solo a dos términos, salen las longitudes de cables siguientes (puede demostrarse fácilmente):

$$\widehat{AO} = s_1 = \frac{a_1}{2} + \frac{4 \cdot f_1^2}{3 \cdot a_1} \quad \widehat{OB} = s_2 = \frac{a_2}{2} + \frac{4 \cdot f_2^2}{3 \cdot a_2}$$

$$s = s_1 + s_2 = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{4}{3} \left[ \frac{W_0^2 \cdot a_1^3 + W_0^2 \cdot a_2^3}{64 \cdot H^2} \right] =$$

$$= L + \frac{W_o^2 \cdot [a_1^3 + a_2^3]}{48 \cdot H^2} =$$

$$= \left[ \frac{s = L + \frac{h^2}{2 \cdot L} + \frac{W_o \cdot L^3}{24 \cdot H^2}}{\quad} \right] \quad [10]$$

Volviendo al caso de los ejes conjugados, la longitud total de la parábola con sus datos, (L luz y h desnivel), resulta ser, como también se puede demostrar:

$$\left[ \frac{s = L + \frac{h^2}{2 \cdot L} + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2 \cdot L}{L^2 + h^2}}{\quad} \right] \quad [10']$$

Las tensiones, TA y TB, en los amarres se calculan por las fórmulas ya vistas:

$$T_A = \sqrt{H^2 + P_1^2} = \sqrt{H^2 + [W_o \cdot a_1/2]^2}$$

$$T_B = \sqrt{H^2 + P_2^2} = \sqrt{H^2 + [W_o \cdot a_2/2]^2}$$

Existe otra fórmula de cálculo interesante, considerando los ejes ortogonales pasando por A (figura de la página anterior):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W_o}{H} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{W_o}{H} \cdot x + a \quad ; \quad y = \frac{W_o \cdot x^2}{2 \cdot H} + a \cdot x + b$$

ahora, para  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $b = 0$ , queda:

$$x = a_1/2 \quad ; \quad dy/dx = 0 \quad ; \quad a = - \frac{W_o \cdot a_1}{2 \cdot H}$$

$$y = \frac{W_o \cdot x^2}{2 \cdot H} - \frac{W_o \cdot a_1 \cdot x}{2 \cdot H}$$

Téngase presente que se debe cumplir también, por los valores de las coordenadas del punto B, que para  $x = L$ ,  $y = h$ .

### 12.5.- Equilibrio de un cable pesado: catenaria.

Aquí no tenemos más remedio que partir de la fórmula [1], pág. 48 ó 49, y emplear un laborioso cálculo matemático:

$$\frac{d}{ds} \left[ \frac{dy}{dx} \right] = \frac{W}{H} \quad ; \quad d \left[ \frac{dy}{dx} \right] = \frac{W}{H} \cdot ds \quad ; \quad d \left[ \frac{dy}{dx} \right] =$$

$$= \frac{dy}{dx} = \frac{W}{H} \int ds = \frac{W}{H} \int \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad ; \quad \frac{d^2y}{dx^2} =$$

$$= \frac{W}{H} \sqrt{1 + (dy/dx)^2} \quad ; \quad \text{hagamos un cambio de variable:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{sh}z \implies \begin{cases} \text{sh}z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} & ; \quad \text{sh}0 = 0 \\ \text{ch}z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} & ; \quad \text{ch}0 = 1 \end{cases}$$

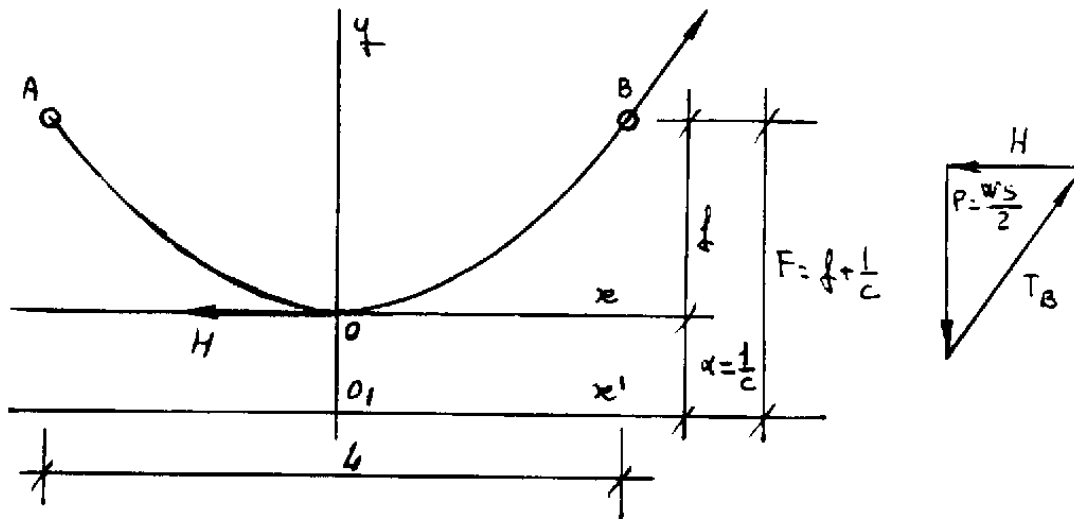
Volviendo a la ecuación diferencial, introduciendo estos cambios:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} (\text{sh}z) = \text{ch}z \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{W}{H} \sqrt{1 + \text{sh}^2 z} =$$

$$= \frac{W}{H} \text{ch}z \quad ; \quad \text{quedando, finalmente:} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{W}{H} \quad ;$$

que, una vez integrada:

$$z = \frac{W}{H} \cdot x + c1$$



Si se toma el eje "x" por 0 de la figura anterior,

$x = 0, \quad \frac{dy}{dx} = \text{sh}z, \quad z = 0, \quad c_1 = 0, \quad \text{queda la ecuación:}$

$z = \frac{W}{H} \cdot x \quad ; \quad \text{y sustituyendo en} \quad \frac{dy}{dx} = \text{sh}z \quad \text{se obtiene:}$

$\frac{dy}{dx} = \text{sh} \frac{W}{H} \cdot x \quad ; \quad \text{integrando:} \quad y = \frac{W}{H} \left[ \text{ch} \frac{W}{H} \cdot x + c_2 \right]$

$x = 0$
$y = 0$
$c_2 = -1$

$$y = \frac{H}{W} \left[ \text{ch} \frac{W}{H} \cdot x - 1 \right]$$

[11]

Se puede presentar la última ecuación de otra forma, trasladando al eje "x" por 01, a distancia  $\alpha = H/W = 1/c$ , quedando las ecuaciones clásicas:

ejes por 0:

$$y = \frac{1}{c} \left[ \operatorname{ch} cx - 1 \right] \quad [11']$$

ejes por 01:

$$y = \frac{1}{c} \operatorname{ch} cx \quad [12]$$

Ahora y para el cálculo de las tensiones de amarre partimos de las ecuaciones 2 y 3, página 49:

$$T = H \cdot \frac{ds}{dx} \quad ; \quad ds = \sqrt{1 + (dy/dx)^2} dx \quad ;$$

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 cx} = \operatorname{ch} cx \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{array}{l} T = H \cdot \operatorname{ch} cx = H \cdot (1 + cy) \\ T = H + y \cdot W \end{array} \right\} [13]$$

Finalmente, para el cálculo de la longitud del cable:

$$s = \int_{x_0}^{x_1} \operatorname{ch} cx \, dx = \frac{1}{c} \operatorname{sh} cx \Big|_{x_0}^{x_1} \quad ; \quad \text{por lo que la semicatenaria:}$$

$$\left[ \begin{array}{l} \frac{s}{2} = \frac{1}{c} \cdot \operatorname{sh} cx \Big|_0^{L/2} = \frac{1}{c} \cdot \operatorname{sh} \frac{c \cdot L}{2} \quad ; \quad \left[ \frac{s \cdot c}{2} \right]^2 = \operatorname{sh}^2 \frac{c \cdot L}{2} \\ F = \frac{1}{c} \cdot \operatorname{ch} \frac{c \cdot L}{2} \quad ; \quad F^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \operatorname{ch}^2 \frac{c \cdot L}{2} = \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \operatorname{sh}^2 \frac{c \cdot L}{2} \right] = \\ = \frac{1}{c^2} \cdot \left[ 1 + \frac{s^2 \cdot c^2}{4} \right] \end{array} \right.$$



$$F^2 = \frac{1}{c^2} + \frac{s^2}{4} \quad ; \quad \frac{s}{2} = \sqrt{F^2 - \frac{1}{c^2}} = \sqrt{\left[f + \frac{1}{c}\right]^2 - \frac{1}{c^2}} =$$

$$= \sqrt{f^2 + 2 \cdot f \cdot \frac{H}{W}}$$

Si la catenaria es simétrica, de ramas iguales:

$$s = 2 \cdot \sqrt{f^2 + 2 \cdot f \cdot \frac{H}{W}} \quad [14]$$

Y si lo es de ramas desiguales, de flechas f1 y f2:

$$s = \sqrt{f1^2 + 2 \cdot f1 \cdot \frac{H}{W}} + \sqrt{f2^2 + 2 \cdot f2 \cdot \frac{H}{W}} \quad [15]$$