ÁLGEBRA VECTORIAL; FUNDAMENTOS. - ÁLGEBRA VECTORIAL; FUNDAMENTOS.

Javier Pajon Permuy.

ÁLGEBRA VECTORIAL; FUNDAMENTOS.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

UNIDAD DIDÁCTICA I:
CÁLCULO VECTORIAL.

TEMA II

ÁLGEBRA VECTORIAL; FUNDAMENTOS

2.1.- Definicion, notacion y clasificacion de los vectores.

Un vector (en Geometria) es un ente geométrico definido por un segmento orientado de recta, que se utiliza para la representación de magnitudes llamadas magnitudes vectoriales. Otra definición (más Mecánica) es la de una cantidad que tiene magnitud, dirección y sentido. Otra (Matemática); elemento de un espacio vectorial (ver 2.3). **En Mecánica, una magnitud es vectorial cuando en su determinación necesitamos, además de su medida (módulo), una dirección y un sentido.**

Por tanto, los vectores se representan gráficamente por segmentos acabados en una punta de flecha. Queda determinado su módulo por la longitud del segmento; su dirección por la recta a que pertenece; y su sentido por la punta de la flecha. Al origen del vector se le llama punto de aplicación.

Para la escritura de vectores se utiliza la notación adoptada por la Unión Internacional de Física Pura y Aplicada (U.I.F.P.A.), representando estas magnitudes vectoriales por letras negritas, por ejemplo; **V (en negrita)**; y la representación de su módulo por la correspondiente letra cursiva *V* o bien la notación |**V**|. Cuando definamos el vector por su origén (O) y extremo (O¨) convendremos en representarlo así: **OO¨** o también mediante la diferencia simbólica **O´- O** . Sin embargo, en las figuras optamos por representarlos como normalmente se hace en un manuscrito o en la pizarra del aula, es decir, con la flecha indicativa de vector sobre la letra que representa a la magnitud vectorial correspondiente.

Los vectores en general pueden ser:

Libres.- Sin localización especifica en el espacio. Un vector libre puede trasladar su origen a cualquier punto del espacio, siempre que conserve su módulo y sentido y mantenga paralela su dirección. Ej. momento de un par.

Deslizantes.- Sin localización especifica a lo largo de una recta dada. Un vector deslizante solo puede trasladar su origen a lo largo de su recta de aplicación. Ej. la fuerza aplicada a un sólido.

Fijos.- Un vector fijo es el de origen fijo. Ej. la intensidad del campo gravitatorio en un punto dado.

Comparativamente pueden ser:

Vectores equipolentes.- Son los que tienen igual módulo, la misma dirección o direcciones paralelas y el mismo sentido. La equipolencia es una relación de equivalencia, que establece una partición del conjunto de los vectores en clases de equivalencia.

Vectores iguales.- Son los que tienen la misma magnitud, dirección y sentido.

Vectores equivalentes.- Son los que producen el mismo efecto.

Atendiendo a lo que representan pueden ser:

Vectores polares.- Son los que representan magnitudes físicas relacionadas con una traslación, como la velocidad lineal por ejemplo.

Vectores axiales.- Son los que representa magnitudes físicas ligadas a una rotación, como el vector velocidad angular.

Fijado un sistema de referencia, se denominan componentes de un vector **V** los valores de las proyecciones del vector sobre los ejes del sistema de referencia, por ejemplo; Vx,Vy,Vz.

2.2.- Espacio vectorial.

Recordemos algunas nociones estudiadas en álgebra.

Se llama n-tuple de números reales al conjunto ordenado de números reales.

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$$

El conjunto de todas las n-tuples se representa por $\Re^n$ y sus elementos reciben el nombre de vectores y también puntos. Dentro de este conjunto se define una ley de composición interna.

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Re^n \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1, x_2,..., x_n) + (y_1, y_2,..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2., ..., x_n + y_n)$

y una ley de composición externa sobre el cuerpo $\Re$ de los números reales.

$\forall \mathbf{x} \in \Re^n, \forall \lambda \in \Re \qquad \lambda \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (x_1, x_2,..., x_n) = (\lambda\cdot x_1, \lambda\cdot x_2,..., \lambda\cdot x_n)$

El conjunto $\Re^n$ dotado de estas dos operaciones tiene estructura de espacio vactorial,

Las x_i,(i = 1,2,...,n), se llaman coordenadas del vector.

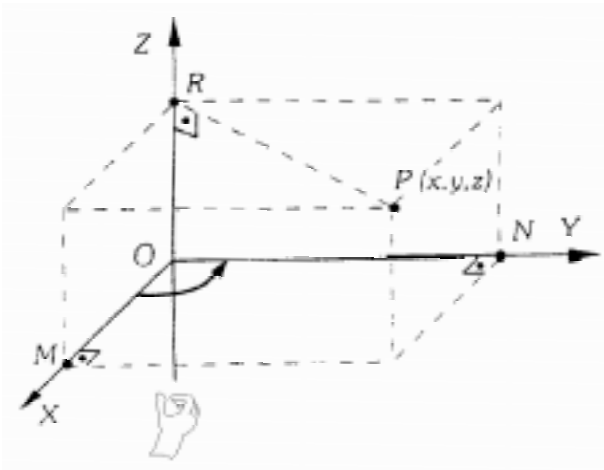
También sabemos que $\Re^n$ es un espacio vectorial de n dimensiones, un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n)$ en base canónica se expresa así:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2,..., x_n) = x_1(1, 0, ..., 0) + x_2(0, 1, ..., 0) +,..., + x_n(0, 0, ..., 1)$$

$$\mathbf{x} = x_1\, \mathbf{e_1} + x_2\, \mathbf{e_2} +,..., + x_n\, \mathbf{e_n}$$

Para el estudio de cualquier fenómeno físico necesitamos un sistema de referencia, la forma más simple empleada, es el de coordenadas cartesianas ortogonales. Veamos como se establece este criterio.

Inicialmente, podemos asociar un conjunto de puntos X con el conjunto de los números reales, lo que constituiria un *sistema coordenado del espacio unidireccional* formado por los puntos de X.



Podemos enunciar que el par de números (x,y) que representen las coordenadas de un punto P en el plano, y la correspondencia biunívoca de parejas ordenadas de números con el conjunto de puntos del plano XY es el *sistema coordenado ortogonal del espacio bidimensional* constituido por los puntos del plano.

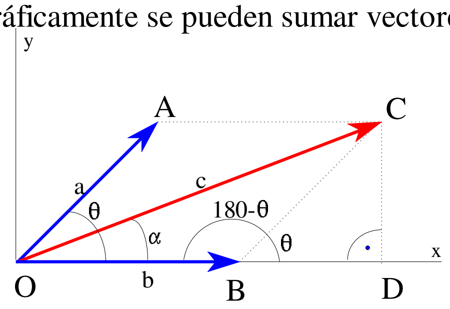
Por tanto, la terna ordenada de números (x,y,z) que representan las coordenadas de un punto P en el espacio, y la correspondencia biunívoca de ternas ordenadas de números con el conjunto de puntos del espacio XYZ es el *sistema coordenado ortogonal del espacio tridimensional* constituido por los puntos del espacio.

Convenimos llamar triedro trirrectangulo positivo o dextrogiro el representado en la figura.

2.3.- Operaciones fundamentales; suma y diferencia de vectores.

Adición de vectores.

Sumar o componer dos o más vectores es hallar otro vector resultante cuyas componentes sean iguales a la suma de las componentes de los vectores sumados. Gráficamente se pueden sumar vectores usando la ley del paralelogramo.



Por el **Teorema de los cosenos** deducimos:

$c^2 = a^2+b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos(180-\alpha) = a^2+b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha$

$$c = \sqrt{a^2+b^2+2\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha}$$

O también sumando las componentes cartesianas, situando el eje x en b tendremos:

$c^2 = c_x^2 + c_y^2$, $a^2 = a_x^2 + a_y^2$, $b_x = b$, $a_x = a\cdot\cos\alpha$

$c_y = a_y$ $c_x = b_x + a_x$ => $c_x^2 = b_x^2 + a_x^2 + 2\cdot b_x.a_x$

luego; $c^2 = b_x^2 + a_x^2 + 2\cdot b_x.a_x + a_y^2 = a^2+b^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\alpha$

$$sen\Theta = \frac{CD}{OC} \Rightarrow \Theta = arcsen\left(\frac{a\cdot sen\alpha}{c}\right)$$

El angulo Θ será:

O aplicando el **teorema de los senos**:

$$\frac{CD}{sen\Theta} = \frac{C}{sen90} \Rightarrow \frac{a\cdot sen\alpha}{sen\Theta} = \frac{C}{1} \Rightarrow \Theta = arcsen\left(\frac{a\cdot sen\alpha}{c}\right)$$

Propiedades de la suma de vectores:

- Conmutativa: a + b = b + a
- Asociativa: (a + b) + c = a + (b + c)

Sustracción de vectores.

Se cambia de sentido uno de ellos y se suman.

a - b = a + (-b)

2.4.- Forma trinomia y vectores unitarios.

En el espacio tridimensional hemos definido un punto por tres coordenadas (x,y,z). Definimos lo mismo mediante un vector **r** = **r** (x,y,z) llamado *vector de posición*, a la terna ordenada de números (x,y,z) los llamamos componentes coordenados del vector.

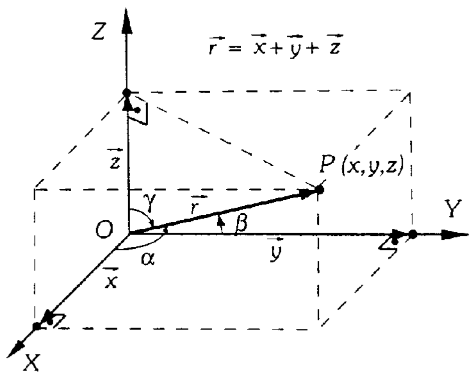
Si utilizamos un sistema de coordenadas diferente, los tres números cambian a (x´,y´,z´), sin embargo, el vector **r** es el mismo en ambos sistemas, es decir la definición de vector permanece invariable o independiente del sistema de coordenadas elegido.

En un sistema coordenado ortogonal X, Y, Z como en el de la figura, y dándole carácter vectorial a las proyecciones ortogonales, **x**, **y**, **z**; de **r** sobre los ejes, podemos escribir:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

Las componentes **x**, **y**, **z**, tienen de módulo:

$$\boxed{x = r\cos\alpha \qquad y = r\cos\beta \qquad x = r\cos\gamma} \quad (1)$$



Los cosenos de ángulos α, β, γ, que forma **r** con cada uno de los ejes se les llama cosenos directores.

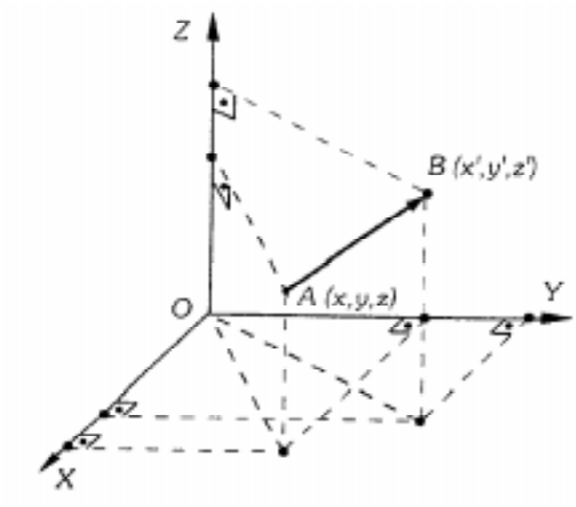
El módulo de **r** (diagonal del paralelepipedo construido con *x, y, z* como lados) es:

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Si elevamos al cuadrado las igualdades (1) y sumamos, obtendremos:

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\cdot(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma) \quad => \quad \boxed{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1}$$

Si el vector viene dado por las coordenadas de su origen A (x,y,z) y de su extremo B(x´,y´,z´), entonces las componentes coordenadas del vector AB serán:



(x´- x, y´- y, z´- z).

Tendremos:

X = x´- x

Y = y´- y   escribiremos: **AB = X + Y + Z**

Z = z´- z

Llamamos vector unitario (o versor) a todo vector de módulo unidad, por tanto; el vector unitario en una dirección se obtiene dividiendo cualquier vector en esa dirección por su módulo.

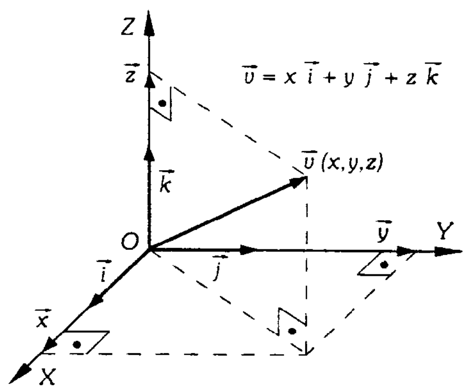
Si las componentes de un vector **v** son **x**, **y**, **z**, su ecuación vectorial será:

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$$

Llamando **i**, **j**, **k**, a los vectores unitarios en la dirección y sentido de los ejes, se verificará:

x = *x***i**, **y** = *y***j**, **z** = *z***k**; siendo *x, y, z*, los módulos de **x**, **y**, **z**. Sustituyendo en la ecuación vectorial tendremos:

$$\boxed{\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}$$



Al ser los cosenos directores:

$\cos\alpha = x/v$, $\cos\beta = y/v$, $\cos\gamma = z/v$,

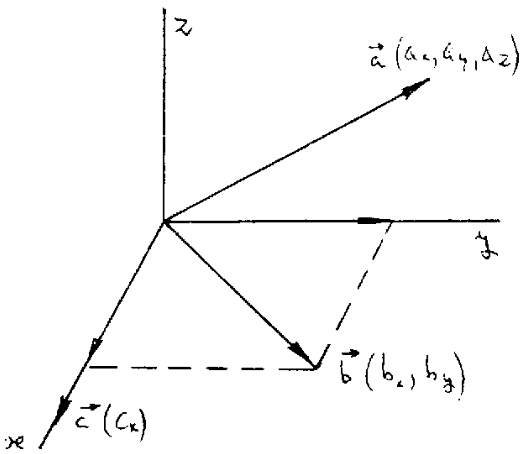
el vector unitario en la dirección de **v** será:

$$\boxed{\mathbf{e}_v = x/v\ \mathbf{i} + y/v\ \mathbf{j} + z/v\ \mathbf{k} = \cos\alpha\ \mathbf{i} + \cos\beta\ \mathbf{j} + \cos\gamma\ \mathbf{k}}$$

2.5.- *Producto de varios vectores.-*

(1)	$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = n\cdot\vec{c}$	(carece de propiedad conmutativa)
(2)	$\vec{a}.\vec{b}\wedge\vec{c}$	(producto mixto)
(3)	$\vec{a}\wedge\vec{b}\wedge\vec{c}$	(doble producto vectorial)

2.6.- *Demostración de la fórmula $\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$.-* Dados tres vectores cualesquiera, siempre se podrá, mediante movimientos adecuados, situarlos uno sobre el eje x; otro sobre el plano x-y; y el tercero en posición arbitraria.



O bien tomar los ejes uno coincidiendo con la dirección y sentido de un vector; el segundo normal al primero en el plano determinado por dos de ellos; y el tercero en la perpendicular a los dos anteriores. Con este supuesto:

$$\vec{a} = ax\cdot\vec{i} + ay\cdot\vec{j} + az\cdot\vec{k}$$

$$\vec{b} = bx\cdot\vec{i} + by\cdot\vec{j}$$

$$\vec{c} = cx\cdot\vec{i}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = ax\cdot cx$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ax\cdot bx + ay\cdot by$$

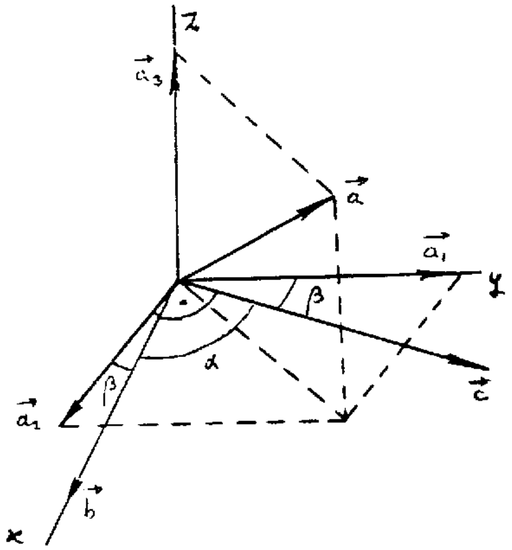
$$\vec{b}\wedge\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ bx & by & 0 \\ cx & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\ cx\cdot by\cdot\vec{k}$$

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ ax & ay & az \\ 0 & 0 & -cx\cdot by \end{vmatrix} = -\ ay\cdot cx\cdot by\cdot\vec{i} + ax\cdot cx\cdot by\cdot\vec{j};$$

sumando y restando $ax\cdot bx\cdot cx\cdot\vec{i}$ queda:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = ax\cdot cx\cdot(bx\cdot\vec{i} + by\cdot\vec{j}) - (ax\cdot bx + ay\cdot by)\cdot cx\cdot\vec{i} =$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Se puede dar una demostración más rigurosa que la anterior, partiendo de las mismas posiciones de los vectores, pero descomponiéndolos convenientemente:



Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, elegidos $\vec{b}$ sobre el eje x, $\vec{c}$ en el plano x-y y $\vec{a}$ en una posición cualquiera, como antes. Descompongamos $\vec{a}$ en tres, $\vec{a3}$ sobre el eje z, $\vec{a2}$ perpendicular a $\vec{c}$ y $\vec{a1}$ perpendicular a $\vec{b}$:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) =$$
$$= (\vec{a1} + \vec{a2} + \vec{a3})\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) =$$
$$= \vec{a1}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) + \vec{a2}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) \overset{(1)}{+} 0 =$$
$$= \vec{b}/b\cdot(a1\cdot\overset{(2)}{b}\cdot c\cdot sen\alpha) -$$
$$- \vec{c}/c\cdot(a2\cdot\overset{(2)}{b}\cdot c\cdot sen\alpha) =$$

$$= \vec{b}\cdot c\cdot\overset{(3)}{a1}\cdot cos\beta - \vec{c}\cdot b\cdot\overset{(3)}{a2}\cdot cos\beta = \vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}) =$$
$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})\cdot\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$$

Aclaraciones.-

(1).-es nulo por ser $\vec{b}\wedge\vec{c}$ paralelo a $\vec{a3}$ y, por tanto, su doble producto vectorial nulo.

(2).-el producto $\vec{b}\wedge\vec{c}$ tiene la dirección del eje z y es perpendicular a $\vec{a1}$; el resultado del doble producto es un vector en la dirección $\vec{b}$; y basta aplicar al módulo un vector unitario $\vec{b}/b$; analogamente el otro caso, que resulta de sentido contrario a $\vec{c}$, $-\vec{c}/c$.

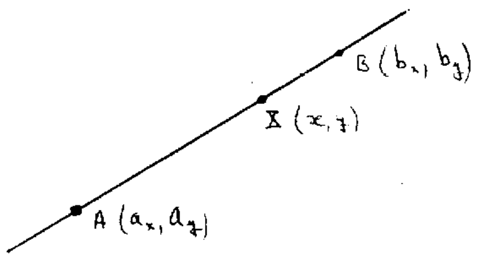
(3).-$a1\cdot cos\beta$ = proy.$\vec{a1}$ sobre $\vec{c}$ $\Rightarrow$ proy.$\vec{a}$ sobre $\vec{c}$ = proy.($\vec{a1}$ + $\vec{a2}$ + $\vec{a3}$)sobre $\vec{c}$ = proy.$\vec{a1}$ sobre $\vec{c}$

$a1.cos\beta$ = proy.$\vec{a2}$ sobre $\vec{b}$ $\Rightarrow$ proy.$\vec{a}$ sobre $\vec{b}$ = proy.($\vec{a1}$ + $\vec{a2}$ + $\vec{a3}$)sobre $\vec{b}$ = proy.$\vec{a2}$ sobre $\vec{b}$

TEMA III

ÁLGEBRA VECTORIAL; AMPLIACIÓN Y APLICACIONES

3.1.- *Plano: ecuación de la recta.*-Una determinada recta tiene la misma dirección que un vector difinido por dos puntos cualesquiera de ella; por lo tanto, si A y B son dos puntos de una recta y X es otro variable de la misma, escribiendo la condición vectorial de paralelismo, tendremos

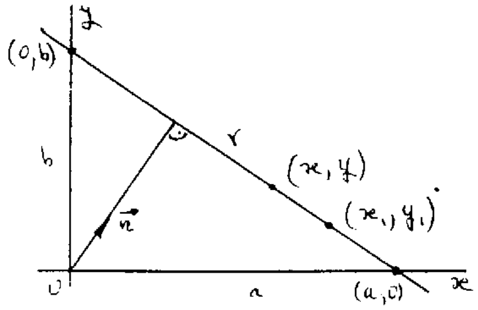


$$\frac{x - ax}{bx - ax} = \frac{y - ay}{by - ay} \qquad [1]$$

y por analogía en el espacio:

$$\frac{x - ax}{bx - ax} = \frac{y - ay}{by - ay} = \frac{z - az}{bz - az} \qquad [1']$$

El vector $\overrightarrow{B-A}$ puede ser uno cualquiera , definido por dos puntos conocidos, o el unitario $\vec{r}(\cos\alpha, \cos\beta)$. En la figura adjunta, y usando el mismo principio anterior, si a y b son las coordenadas de los segmentos en el origen:



$$\frac{x - 0}{a - 0} = \frac{y - b}{0 - b} \Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Por otra parte, si $\vec{n}$ es un vector perpendicular a la recta r, siendo $\vec{n} = A\vec{i} + B\vec{j}$, la condición de perpencidularidad permite escribir:

$$A\cdot(x - x1) + B\cdot(y - y1) = 0 \Longrightarrow Ax + By \underbrace{- Ax1 - By1}_{C} = 0 \Rightarrow Ax + By + C = 0$$

en el que (A,B) son las componentes de un vector asociado, perpendicular a la referida recta; a cada valor Ci de C corresponde una recta del haz paralelo, todas ellas perpendiculares a la dirección $\vec{u}(A,B)$; (en el espacio volveremos a hallar una fórmula extensión de la anterior, referida al plano).

3.2.- *Paralelismo y perpendicularidad de rectas.- Dadas dos rectas, por lo visto anteriormente, y lo estudiado vectorialmente, para que ambas sean paralelas o perpendiculares podemos escribir respectivamente:*

$$r1 \equiv A1x + B1y + C1 = 0 \qquad ; \qquad paralelismo \equiv \frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2}$$
$$r2 \equiv A2x + B2y + C2 = 0$$

$$A1\cdot B2 - A2\cdot B1 = 0$$

$$perpendicularidad \equiv A1.A2 + B1.B2 = 0$$

y las mismas expresiones valdrán cuando las rectas vayan definidas de la forma [1]; es decir, en función de sus vectores asociados paralelos.

3.3.- *Angulo de dos rectas.-*

$$r1 \equiv A1x + B1y + C1 = 0 \ ; \qquad tg\alpha1 = -A1/B1 = m1$$

$$r2 \equiv A2x + B2y + C2 = 0 \ ; \qquad ta\alpha2 = -A2/B2 = m2$$

El ángulo de las dos rectas será el mismo que el formado por sus dos vectores normales asociados, $\vec{u}1(A1,B1)$, $\vec{u}2(A2,B2)$:

$$producto\ escalar \quad A1\cdot A2 + B1\cdot B2 = |\vec{u1}|\cdot|\vec{u2}|\cdot cos(\alpha1-\alpha2)$$

$$producto\ vectorial \quad A1\cdot B2 - A2\cdot B2 = |\vec{u1}|\cdot|\vec{u2}|\cdot sen(\alpha1-\alpha2)$$

$$tg(\alpha1-\alpha2) = tg\alpha = \frac{tg\alpha1-tg\alpha2}{1+tg\alpha1\cdot tg\alpha2} = \frac{m1-m2}{1+m1\cdot m2} = \frac{(-A1/B1)+(A2/B2)}{1+(A1/B1)\cdot(A2/B2)} =$$

$$= \frac{A1\cdot B2 - A2\cdot B1}{A1\cdot A2 + B1\cdot B2} = tg\alpha$$

a la misma expresión se llega partiendo de:

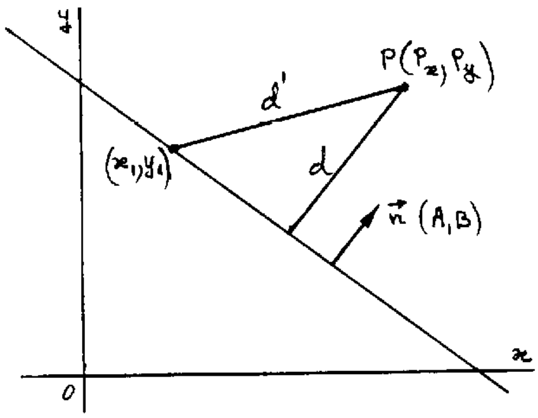
$$\cos\alpha = \cos\alpha 1 \cdot \cos\alpha 2 + \cos\beta 1 \cdot \cos\beta 2$$

$$\cos\alpha = \frac{A1}{\sqrt{A1^2 + B1^2}} \cdot \frac{A2}{\sqrt{A2^2 + B2^2}} + \frac{B1}{\sqrt{A1^2 + B1^2}} \cdot \frac{B2}{\sqrt{A2^2 + B2^2}} =$$

$$= \frac{A1 \cdot A2 + B1 \cdot B2}{\sqrt{A1^2 + B1^2}\,\sqrt{A2^2 + B2^2}}$$

con el cambio trigonometrico conocido $\cos\alpha = 1/\sqrt{1 + tg^2\alpha}$

3.4.- <u>Distancia de un punto a una recta</u>.-Hemos visto que en la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$ $\vec{n}(A,B)$ es un vector normal asociado a la misma; si $(x1,y1)$ es un punto cualquiera de ella, y como el unitario de la dirección $\vec{n}$ es:



$$\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right],$$

tendremos:

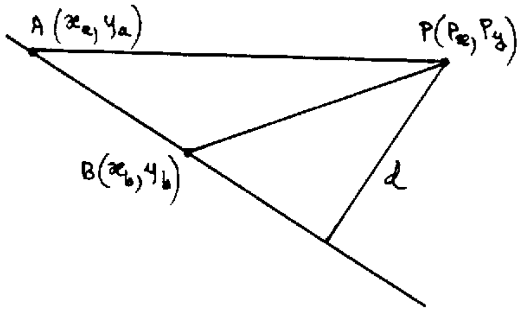
$$d = \left[\vec{d}' \cdot \frac{\vec{n}}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right] = \left[(Px - x1)\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + (Py - y1)\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right] =$$

$$= \left[\frac{A \cdot Px + B \cdot Py \overbrace{- A \cdot x1 - B \cdot y1}^{C}}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right] = \left[\frac{A \cdot Px + B \cdot Py + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right] = d$$;en particular, para el origen, $P(0,0)$, $do = \left[\frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right]$;

la distancia entre dos rectas paralelas será la diferencia de distancias al origen:

$$r1 \equiv Ax + By + c1 = 0 \qquad d = d1 - d2 = \left[\frac{C1 - C2}{\sqrt{A^2+B^2}} \right]$$

$$r2 \equiv Ax + By + C2 = 0$$

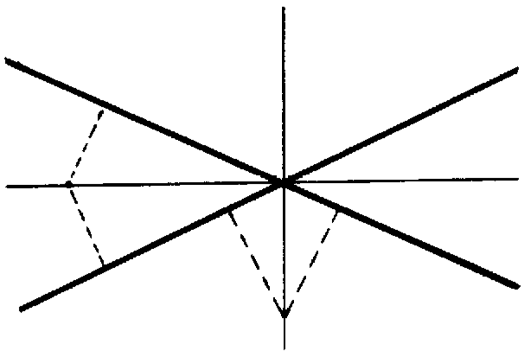


Un caso particular es cuando de la recta se conocen dos puntos:

$$|\vec{AB} \wedge \vec{AP}| = |AB| \cdot |AP| \operatorname{sen}\alpha =$$

$$= |AB| \cdot d \ ; \ d = \frac{|\vec{AB} \wedge \vec{AP}|}{|AB|} \qquad [2]$$

3.5.- *Equidistancia de un punto a dos rectas:bisectrices*.- *Dadas dos rectas, repitiendo lo anterior, bastará hacer:*



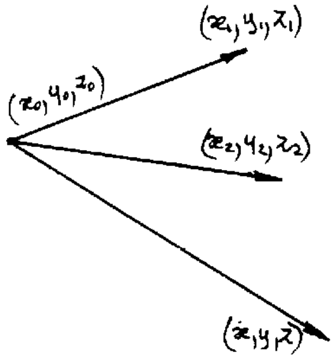
$$A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1 = 0$$

$$A2 \cdot x + B2 \cdot y + C2 = 0$$

$$\frac{A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1}{\pm\sqrt{A1^2 + B1^2}} = \frac{A2 \cdot x + B2 \cdot y + C2}{\pm\sqrt{A2^2 + B2^2}}$$

Como quiera que cualquier punto (x,y) cumple la condición anterior, y resulta ser lineal en x,y, la solución resulta ser una recta, bisectriz del ángulo formado por las dos rectas propuestas, r1 y r2; el signo ± de los radicandos da dos soluciones, dos bisectrices, como se conoce por geometría plana.

3.6.- *Espacio:ecuación del plano.- Para que tres vectores sean coplanarios su prducto mixto ha de ser cero:*



$$\begin{vmatrix} x1-x0 & y1-y0 & z1-z0 & 0 \\ x2-x0 & y2-yo & z2-z0 & 0 \\ x-x0 & y-y0 & z-z0 & 0 \\ x0 & y0 & z0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x1 & y1 & z1 & 1 \\ x2 & y2 & z2 & 1 \\ x0 & y0 & z0 & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix} \qquad [3]$$

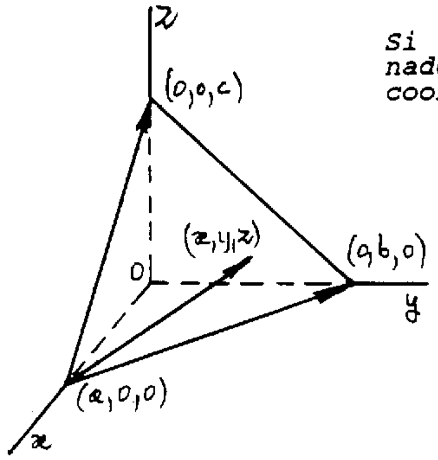
De paso, resolviendo dicho último determinante, que es otra forma de representar la ecuación del plano en función de tres puntos que lo determinan, resulta otra ecuación lineal en x, y, z, y que volveremos a analizar enseguida, de la forma

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Si (A,B,C) es un vector normal al plano, y otro vector del mismo es el [(x-x1),(y-y1),(z-z1)], la condición de perpendicularidad exige:

$$A\cdot(x-x1) + B\cdot(y-y1) + C\cdot(z-z1) = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Luego en la ecuación general del plano A,B,C son las componentes de un vector normal al plano, que llamaremos asociado a aquél.



Si (a,b,c) son los segmentos determinados por un plano sobre los tres ejes coordenados, la ecuación [3] nos da:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

$$b\cdot c\cdot x - a\cdot b\cdot c + a\cdot b\cdot z + a\cdot c\cdot y = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

3.7.- Paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.- Consideremos dos rectas r1, r2, en su forma clásica, y dos planos $\pi1$, $\pi2$ en forma idéntica:

$$r1 \equiv \frac{x - x1}{a1} = \frac{y - y1}{b1} = \frac{z - z1}{c1}$$

$$r2 \equiv \frac{x - x2}{a2} = \frac{y - y2}{b2} = \frac{z - z2}{c2}$$

$$\pi1 \equiv A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1 \cdot z + D1 = 0$$

$$\pi2 \equiv A2 \cdot x + B2 \cdot y + C2 \cdot z + D2 = 0$$

Dos rectas serán paralelas o perpendiculares cuando lo sean respectivamente sus vectores unitarios (a1.b1.c1), (a2,b2,c2) o cualquier otro vector sobre cada una de ellas; en particular, sus vectores asociados unitarios ($\cos\alpha1, \cos\beta1, \cos\Gamma1$), ($\cos\alpha2, \cos\beta2, \cos\Gamma2$).Lo mismo ocuirrirá entre planos, serán paralelos o perpendiculares cuando lo sean respectivamente sus vectores asociados (pues cada uno de ellos es perpendicular a su plano correspondiente:

paralelismo: perpendicularidad

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2} \qquad (r1,r2) \qquad ; \quad a1 \cdot a2 + b1 \cdot b2 + c1 \cdot c2 = 0$$

$$\frac{A1}{A2} = \frac{B1}{B2} = \frac{C1}{C2} \qquad (\pi1,\pi2) \qquad ; \quad A1 \cdot A2 + B1 \cdot B2 + C1 \cdot C2 = 0$$

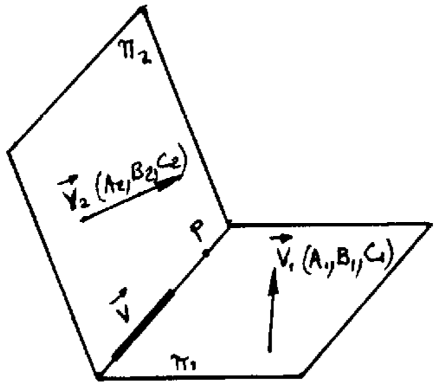
Por contra, el paralelismo entre recta y plano indicará la perpendicularidad de sus vectores asociados; y viceversa:

paralelismo perpendicularidad

$$a1 \cdot A1 + b1 \cdot B1 + c1 \cdot C1 = 0 \qquad (r1,\pi2) \qquad \frac{a1}{A1} = \frac{b1}{B1} = \frac{c1}{C1}$$

Con estas simples condiciones se pueden resolver multitud de problemas de incidencia entre rectas y planos; veamos algunos ejemplos típicos:

3.8.- *Intersección de dos planos*.- *Será la recta con vector asociado $\vec{V}$, perpendicular a los vectores $\vec{V1}(A1,B1,C1)$, $\vec{V2}(A2,B2,C2)$*



$$\vec{V} = \vec{V1} \wedge \vec{V2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A1 & B1 & C1 \\ A2 & B2 & C2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{Vx}{\begin{vmatrix} B1 & C1 \\ B2 & C2 \end{vmatrix}} = \frac{Vy}{\begin{vmatrix} C1 & A1 \\ C2 & A2 \end{vmatrix}} = \frac{Vz}{\begin{vmatrix} A1 & B1 \\ A2 & B2 \end{vmatrix}}$$

nota.-Es necesario conocer un punto P común a ambos planos (por ejemplo, para $z = k$, y resolver el sistema en x,y entre el plano π1 y el plano π2).

3.9.- *Plano por un punto (x1,y1,z1) paralelo a $\pi 1 \equiv A1\cdot x + B1\cdot y + C1\cdot z + D1 = 0$*.- *Ambos planos han de tener el mismo vector asociado:*

$$A1\cdot(x - x1) + B1\cdot(y - y1) + C1\cdot(z - z1) = 0$$

3.10.- *Plano por un punto (x1,y1,z1) perpendicular a r1*.- *El plano tendrá por vector asociado el de la recta*

$$r1 \equiv \frac{x - x0}{a} = \frac{y - y0}{b} = \frac{z - z0}{c} \qquad ===>$$

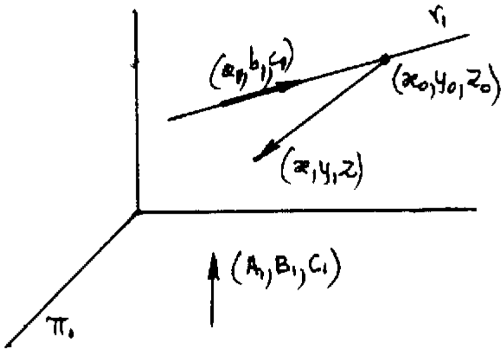
$$a\cdot(x - x1) + b\cdot(y - y1) + c\cdot(z - z1) = 0$$

3.11.- *Plano pasando por r1 y perpendicular a π1.-*

$$r1 \equiv \frac{x - x0}{a1} = \frac{y - y0}{b1} = \frac{z - z0}{c1} \quad ;$$

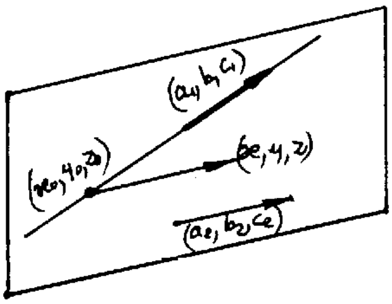
$$\pi 1 \equiv A1 \cdot x + B1 \cdot y + C1 \cdot z + D1 = 0$$

Los vectores $[(x-x0),(y-y0),(z-z0)]$, $(a1,b1,c1)$ y $(A1,B1,C1)$ serán coplanarios y podemos escribir:



$$\begin{vmatrix} x-x0 & y-y0 & z-z0 \\ a1 & b1 & c1 \\ A1 & B1 & C1 \end{vmatrix} = 0$$

3.12.- *Plano por r1 paralelo a r2.-* Razonamiento análogo al anterior



$$\begin{vmatrix} x-x0 & y-y0 & z-z0 \\ a1 & b1 & c1 \\ a2 & b2 & c2 \end{vmatrix} = 0$$

3.13.- *Angulo de dos rectas o dos planos o entre recta y plano.-* Será el formado entre sus vectores asociados correspondientes (o el complementario, en su caso). Por ejmplo, entre dos rectas r1 y r2

$<(r1,r2) \implies$

$$\cos\theta = \cos\alpha 1 \cdot \cos\alpha 2 + \cos\beta 1 \cdot \cos\beta 2 + \cos\Gamma 1 \cdot \cos\Gamma 2 =$$

$$= \frac{a1 \cdot a2 + b1 \cdot b2 + c1 \cdot c2}{\sqrt{a1^2 + b1^2 + c1^2} \cdot \sqrt{a2^2 + b2^2 + c2^2}}$$

$$<(r1,\pi 1) \quad \Rightarrow \quad sen(90°-\theta) = \frac{a1\cdot A1 + b1\cdot B1 + c1\cdot C1}{\sqrt{a1^2+b1^2+c1^2}\cdot\sqrt{A1^2+B1^2+C1^2}}$$

3.14.- *Distancia de un punto a un plano.*- Operando correlativamente a como hicimos en el plano, tenemos:

$\pi 1 \equiv A1\cdot x + B1\cdot y + C1\cdot z + D1 = 0$; vector unitario normal, $\vec{n}$:

$$\left[\frac{A1}{\sqrt{A1^2+B1^2+C1^2}}, \frac{B1}{=}, \frac{C1}{=}\right];$$

coordenadas de $P(Px,Py,Pz)$; un punto del plano $(x1,y1,z1)$; vector $\vec{d'}(Px - x1, Py - y1, Pz - z1)$;con lo que la distancia es [4]

$$d=|\vec{d'}\cdot\vec{n}| = \left[\frac{(Px-x1)A1+(Py-y1)B1+(Pz-z1)C1}{\sqrt{A1^2+B1^2+C1^2}}\right] = \left[\frac{A1\cdot Px+B1\cdot Py+C1\cdot Pz+D1}{\sqrt{A1^2+B1^2+C1^2}}\right]$$

nota.-Es evidente que ya no podemos aplicar el segundo procedimiento, fórmula [2]

3.15.- *Distancia del origen a un plano.*-Bastará hacer $Px = Py = Pz = 0$ en [4], quedando:

$$d0 = \left[\frac{D1}{\sqrt{A1^2+B1^2+C1^2}}\right]$$

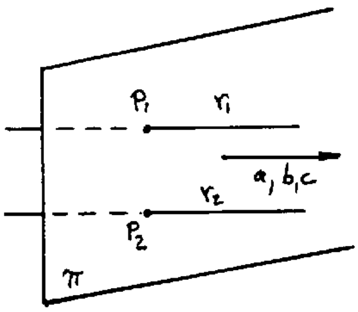
3.16.- *Distancia entre dos planos paralelos.*-

$$\pi 1 \equiv Ax + By + Cz + D1 = 0$$

$$\pi 2 \equiv Ax + By + Cz + D2 = 0$$

$$d = \left[\frac{D1-D2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right]$$

3.17.- *Distancia entre rectas paralelas.*-Se hallarán las intersecciones entre las rectas y el plano normal:



$$r1 \equiv \frac{x - x1}{a} = \frac{y - y1}{b} = \frac{z - z1}{c}$$

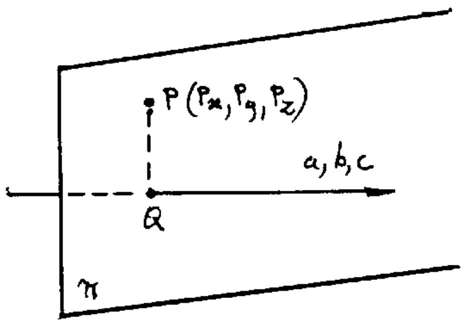
$$r2 \equiv \frac{x - x2}{a} = \frac{y - y2}{b} = \frac{z - z2}{c}$$

$$\pi \equiv a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$

P1[P1x,P1y,P1z], P2[P2x,P2y,P2z]

$$d = \sqrt{(P1x - P2x)^2 + (P1y - P2y)^2 + (P1z - P2z)^2}$$

3.18.- Distancia de un punto a una recta.- Intersección entre el plano $\pi \equiv a(Px-x)+b(Py-y)+c(pz-z)=0$ y la recta dada



$$r \equiv \frac{x-x1}{a} = \frac{y-y1}{b} = \frac{z-z1}{c}$$

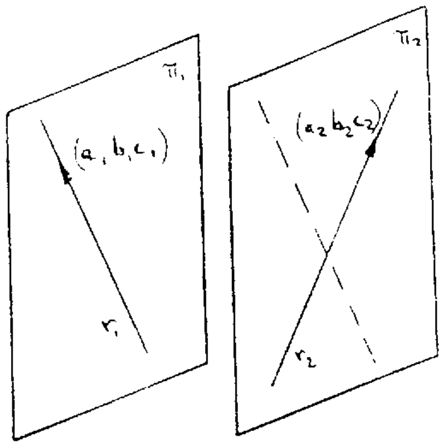
el sistema de ecuaciones (π, r) resuelve el punto Q (Qx,Qy,Qz)

$$d = \sqrt{(Px - Qx)^2 + (Py - Qy)^2 + (Pz - Qz)^2}$$

3.19.- Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.-

$$r1 \equiv \frac{x-x1}{a1} = \frac{y-y1}{b1} = \frac{z-z1}{c1} \quad ; \quad r2 \equiv \frac{x-x2}{a2} = \frac{y-y2}{b2} = \frac{z-z2}{c2}$$

se hallará el plano



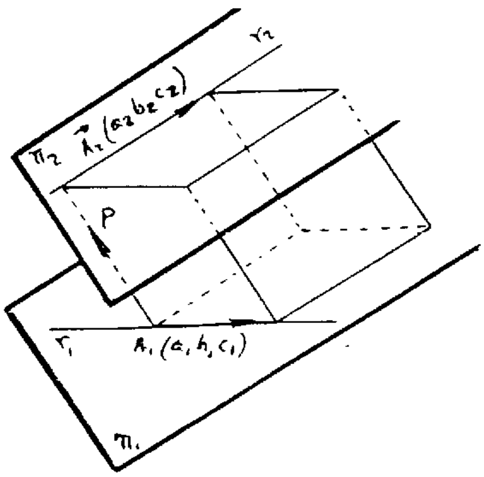
$$\begin{vmatrix} x-x2 & y-y2 & z-z2 \\ a2 & b2 & c2 \\ a1 & b1 & c1 \end{vmatrix} = 0$$

y se determinará la distancia del punto (x1,y1,z1) al plano $\pi 2$; (ver la fórmula [4])

$$d = \frac{\begin{vmatrix} x1-x2 & y1-y2 & z1-z2 \\ a2 & b2 & c2 \\ a1 & b1 & c1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b2 & c2 \\ b1 & c1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c2 & a2 \\ c1 & a1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a2 & b2 \\ a1 & b1 \end{vmatrix}^2}$$

Otra demostración: Siendo r1 y r2 las dos rectas, y con la misma nomenclatura anterior, sus vectores asociados en posiciones concretas determinarían el paralelepípedo de la figura inferior, junto con P; la altura de este paralelepípedo, h, es precísamente la distancia mínima buscada, d=h:

$$V(paral.) = |\vec{A1} \wedge \vec{A2}|\, h = |\vec{A1} \cdot \vec{A2} \wedge \vec{P}| \qquad ; \qquad h = d = \frac{|\vec{A1} \cdot \vec{A2} \wedge \vec{P}|}{|\vec{A1} \wedge \vec{A2}|}$$

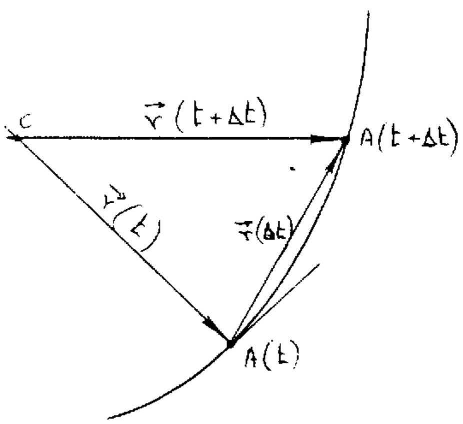


TEMA IV
ANÁLISIS VECTORIAL

4.1.- *Derivada de un punto función de una variable escalar.-* Sea un punto de una curva (en general, en el espacio), cuya posición viene determinada analíticamente:

$A(t) = f(x,y,z)$, en la que las variables x,y,z son función de la variable t

$$x = \theta 1(t) \quad ; \quad y = \theta 2(t)$$
$$z = \theta 3(t)$$



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

y consideremos dos instantes infinitesimales (t) y $(t+ t$ y el vector $\vec{r}(t) = A - O$, tal que

$$A = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

derivando (i,j,k son vectores unitarios fijos y O es fijo

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{dA}{dt} =$$

$$= \frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k}$$

La derivada de un punto, función de una variable escalar, es un vector, de componentes las derivadas de sus coordenadas, que resulta ser tangente a la curva, según la analítica.

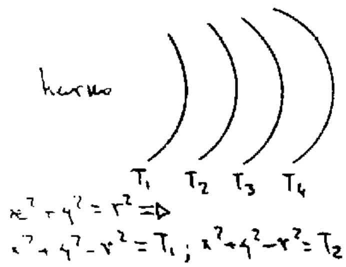
Téngase presente que $d\vec{r}$ (cuerda) y $d\vec{s}$ (arco) en el límite son equivalentes y que podemos valernos de las expresiones útiles (que nos permiten hallar la longitud del arco a través del producto escalar de la cuerda):

$$d\vec{r} = \left[\frac{dx}{dt}\cdot\vec{i} + \frac{dy}{dt}\cdot\vec{j} + \frac{dz}{dt}\cdot\vec{k} \right]\cdot dt \quad ; \quad d\vec{r}\cdot d\vec{r} = dr^2 = ds^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \cdot dt^2$$

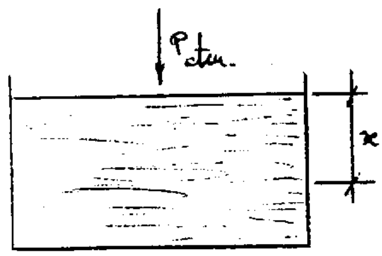
Y no confundir todo lo explicado más arriba con la derivada de un vector, función de una variable escalar (cuya derivada es la derivada de las componentes del vector).

4.2.- *__Campos escalares y vectoriales: Gradiente__.- Si a cada punto A(x,y,z) de una región del espacio corresponde el valor de una magnitud física, U, de naturaleza escalar, se dice que existe un campo escalar, en el que la magnitud U es función de campo. Así, en la transmisión del calor a través de un cuerpo, en régimen estacionario, la temperatura puede variar de unos puntos a otros del cuerpo, pero en uno determinado será siempre la misma; la temperatura es, pues, una función de punto. Análogamente sucede con la presión en un punto de una masa fluída en equilibrio, que es también función de punto.*



Si igualamos la función U a un parámetro C, se obtiene U(x,y,z)=C, que representa una familia de superficies; para cada valor C1, C2,.....se obtiene una superficie de la familia.Ejemplos:

Caso horno, cada superficie isoterma está toda ella a la misma temperatura, T1,T2,.....



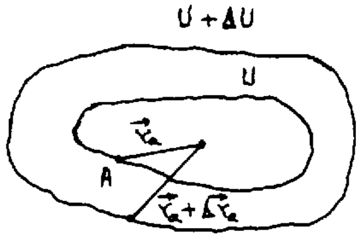
Caso presión hidrostática en un recipiente, cada punto de la horizontal tiene la misma presión,

$$Px = Patm. + p \cdot g \cdot x$$

En la práctica se hace la representación gráfica de modo que C varíe por incrementos iguales; por ejemplo, C=a, C=2a, C=3a,C=4a......,obteniéndose las llamadas superficies de nivel (isotermas, isobaras,.....)

De la misma forma existen campos vectoriales; por ejemplo, en el movimiento de rotación alrededor de un eje fijo de un cuerpo sólido, la velocidad de las partículas será función de su distancia al eje. Y el ejemplo más clásico es el campo de fuerzas gravitatorias.

Imaginemos un campo escalar U. Sea un punto A, en el cual la función toma el valor U_a, definido por su vector de posición $\vec{r}_a = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$; un punto próximo a él, definido por el nuevo vector $\vec{r} + d\vec{r}$ tendrá (en general) un valor distinto de la magnitud U, que dependerá de dx, dy, dz; el incremento de U, si la magnitud es continua y derivable, vendrá dado por la diferencial total



$$dU = U(\vec{r} + d\vec{r}) - U(\vec{r}) =$$

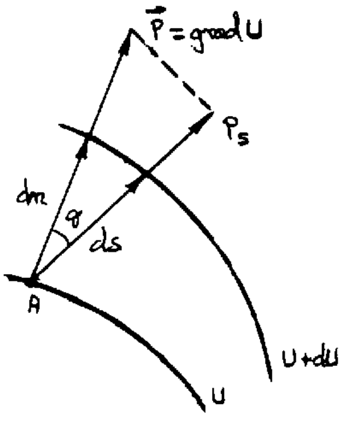
$$= \frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz$$

Puesto que el primer miembro es una magnitud escalar, podemos considerar el segundo como producto escalar del vector $d\vec{r} = d\vec{s} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$ por un segundo vector, llamado "gradiente del escalar U", tal que

$$\vec{P} = \overrightarrow{grad\ U} = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot\vec{k}\ ; \qquad dU = \overrightarrow{grad\ U}\cdot\vec{ds}$$

Ahora bien, si $dU = \overrightarrow{grad\ U}\cdot\vec{ds} = grad\ U\cdot ds\cdot\cos\theta$, [α] y si ds es tangente a la superficie de nivel, no hay paso de una superficie a otra, es decir, $dU = 0$, lo que indica que, al ser el producto escalar nulo, son los vectores $\overrightarrow{grad\ U}$ y $\vec{ds}$ perpendiculares entre sí, y grad$U$ es normal a la superficie:

"El vector gradiente en cada punto es perpendicular a la superficie de nivel que pasa por él".



De [α] sacamos $\left|\frac{dU}{ds}\right| = |\overrightarrow{grad\ U}|\cdot\cos\theta$;

para $\theta = 0 \implies \frac{dU}{dn} = |\overrightarrow{grad\ U}| = |\vec{P}|$

(n dirección normal a la superficie)

En cualquier otra dirección:

$\frac{dU}{ds} = |\vec{P}|\cos\theta = P_s$; luego $P_s = \frac{dU}{ds} < \frac{dU}{dn} = P$

El gradiente es, pues, la derivada di-

direccional máxima y es en el sentido de crecimiento de la función (cuando dU es positivo).

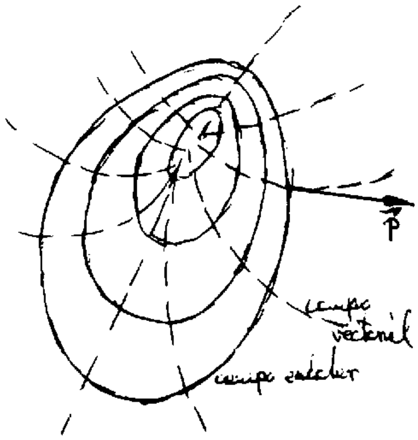
Si consideramos el vector simbólico (operador de Hamilton) nabla,

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k},$$

el gradiente se puede escribir grad $U = \vec{\nabla} U$ = *(nabla de U)*

Evidentemente $|\vec{P}| = |\overrightarrow{grad\ U}| = \sqrt{\left[\frac{\partial U}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial U}{\partial z}\right]^2}$

Nabla es un operador lineal, es decir: $\vec{\nabla}(U + V) = \vec{\nabla} U + \vec{\nabla} V$; *y* $\vec{\nabla}(a\cdot U) = a\cdot\vec{\nabla} U$.



Para un valor dU dado entre dos superficies determinadas el valor grad U = dU/dn será tanto mayor cuanto menor sea la separación entre aquellas. Por eso esta propiedad permite representar los campos escalares y sus gradientes por superficies U = constante = C; cuanto más próximas estén en una zona las superficies el gradiente será más fuerte. Las líneas ortogonales a las superficies de nivel, es decir, las tangentes al gradiente en cada punto se llaman líneas de máximo gradiente del campo.

4.3.- *<u>Divergencia y rotacional de un campo vectorial</u>.- Supongamos definidas tres funciones uniformes y derivables X=X(x,y,z), Y=Y(x,y,z), Z=Z(x,y,z) de las coordenadas de cada punto, funciones cuyas derivadas supondremos continuas. Estas funciones definirán en cada punto del espacio un vector* $\vec{V}(X,Y,Z)$. *Una tal distribución define un campo vectorial.*

Pues bién, se llama divergencia el producto escalar simbólico $div.\vec{P} = \vec{\nabla}\cdot\vec{P} =$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\cdot\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\cdot\vec{k}\right]\cdot\left[X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k}\right] = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

La divergencia se suele llamar también derivada escalar del vector $\vec{P}$; en particular, si $\vec{P}$ es constante o la divergencia es nula, se dice que el vector es solenoidal, es decir, si div.$\vec{P}$ = 0.

Volvemos a repetir que $div.(\vec{P1} + \vec{P2} + \ldots) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{P1} + \vec{P2} + \ldots) = \vec{\nabla}\cdot\vec{P1} + \vec{\nabla}\cdot\vec{P2} + \ldots$

Se define rotacional de un vector:

$$\vec{R} = rot.\ \vec{P} = \vec{\nabla}\wedge\vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Al rotacional se le suele llamar también derivada vectorial de P, rotor de $\vec{P}$ o vórtice de $\vec{P}$. Y el vector $\vec{P}$ se llama potencial vector de $\vec{R}$.

En resumen: El operador ∇ aplicado a un campo escalar, U(x,y,z), permite asociar a éste campo escalar otro vectorial; el mismo operador aplicado respectivamente escalar y vectorialmente a un vector $\vec{P}$ de un campo vectorial permite asociarle dos nuevos campos, uno esclar, div.$\vec{P}$, y otro vectorial, rot.$\vec{P}$.

Si rot.P = 0, ello significa que $\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0,$

$\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0,$ *lo cual quiere decir matemáticamente la existencia*

de la diferencial total exacta $dU = \frac{\partial U}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial U}{\partial z}\cdot dz,$

y, por lo tanto, la existencia de un campo potencial $\vec{P}$ = gra.U.

Luego la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\vec{P}$ sea gradiente de uno escalar es que rot.$\vec{P}$ = 0; por eso un campo vectorial con potencial se llama irrotacional.

Si calculamos: $\quad div.\vec{R} = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{P}) = \dfrac{\partial Rx}{\partial x} + \dfrac{\partial Ry}{\partial y} + \dfrac{\partial Rz}{\partial z} = 0,$

lueog $\vec{R}$ es solenoidal. También $\vec{P}\cdot rot.\vec{P} = \vec{P}\cdot\vec{\nabla}\wedge\vec{P} = 0$, luego $\vec{P}$ y rot.$\vec{P}$ son ortogonales.

4.4.- *Algunas propiedades de la divergencia y del rotacional.- Calculemos primeramente la divergencia del producto de una función escalar y otra vectorial:*

$$div.(U\cdot\vec{P}) = \frac{\partial(UX)}{\partial x} + \frac{\partial(UY)}{\partial y} + \frac{\partial(UZ)}{\partial z} = X\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + Y\cdot\frac{\partial U}{\partial y} + Z\cdot\frac{\partial U}{\partial z} +$$

$$+U\cdot\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right] = \vec{P}\cdot(\vec{\nabla}U) + U\cdot div.\vec{P}$$

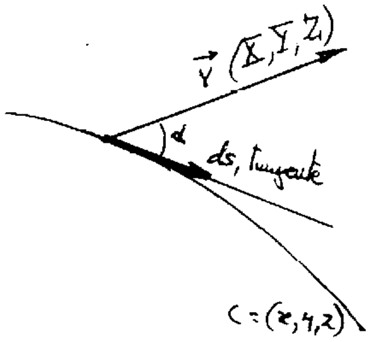
Y el rotacional del mismo producto: $rot\ (U\cdot\vec{P}) =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ UX & UY & UZ \end{vmatrix} = U\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + \left[Z\cdot\frac{\partial U}{\partial y} - Y\cdot\frac{\partial U}{\partial z}\right]\cdot\vec{i} +$$

$$+\left[X\cdot\frac{\partial U}{\partial z} - Z\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right]\cdot\vec{j} + \left[Y\cdot\frac{\partial U}{\partial x} - X\cdot\frac{\partial U}{\partial y}\right]\cdot\vec{k} =$$

$$= U\cdot rot.\vec{P} + (\vec{\nabla}U)\wedge\vec{P} = U\cdot rot.\vec{P} - \vec{P}\wedge(\vec{\nabla}U)$$

4.5.- *Integral de un vector a lo largo de una línea y sobre una superficie: circulación y flujo.-* Sean $X(x,y,z)$, $Y(x,y,z)$, $Z(x,y,z)$ las componentes de un campo vectorial $\vec{V}$; y supongamos trazada la línea $C=C(x,y,z)$ en dicho campo y definido en ella un sentido. Cada elemento $\vec{ds}$, orientado, puede ser considerado como un vector (dx,dy,dz); su producto escalar por $\vec{V}$ valdrá



$$\vec{V}\cdot\vec{ds} = V\cdot ds\cdot \cos\alpha =$$

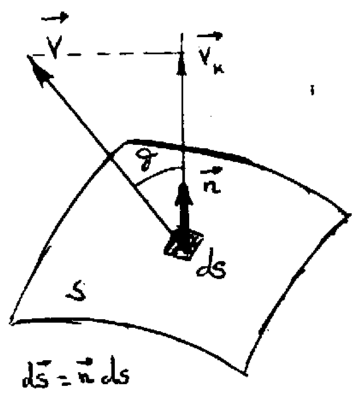
$$= (X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k})\cdot(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) =$$

$$X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz,$$

y la integral de este producto escalar a lo largo de la línea se llama circulación del vecto $\vec{V}$:

$$\text{circulación} = \int_C \vec{V}\cdot\vec{ds} =$$

$$= \int_C X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz$$



Por ejemplo, si X,Y,Z son las componentes de un campo de fuerza, esta integral es el trabajo de la masa unidad al recorrer la línea.

Si en lugar de la línea C, imaginamos una superficie S (de dos caras) y elegimos en ella una cara, podemos definir análogamente:

$$\Phi = \text{flujo de } \vec{V} \text{ sobre } s = \iint_S \vec{V}\cdot\vec{ds} =$$

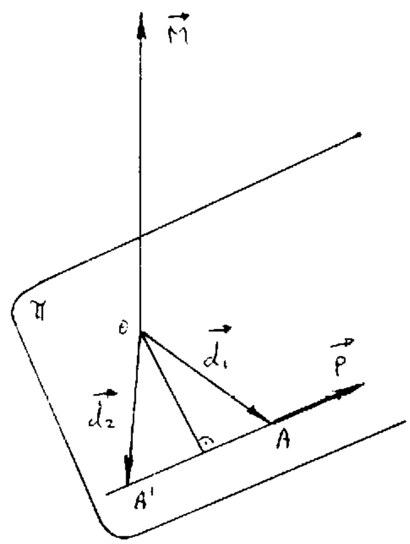
$$= \iint_S (X\cdot dy\cdot dz + Y\cdot dx\cdot dz + Z\cdot dx\cdot dy)$$

Tratándose de una superficie de dos caras habrá que distinguir el flujo entrante del saliente. El concepto de flujo es muy útil en las aplicaciones prácticas; por ejemplo, si $\vec{V}$ es la velocidad de un fluído, $\vec{V}\cdot\vec{ds}$ representa el volumen del filete líquido que ha atravesado $\vec{ds}$ por unidad de tiempo y el flujo es el gasto o volumen total que atraviesa todo el casquete en la unidad de tiempo.

TEMA V

MOMENTOS

5.1.- *Momento de un vector respecto a un punto.-* Si bien el concepto de momento pudiera parecer al alumno novel un tanto artificioso, matemático puro, en seguida se familiarizará con él y acabará captando su sentido físico y práctico. En realidad, el concepto de momento es una medida del efecto rotacional de una fuerza respecto a un punto o eje de un cuerpo.



Sea $\vec{P}$ el vector y O el punto respecto al cual tomemos momento; el punto O y el vector $\vec{P}$ determinan el plano π. Se define como momento a un vector $\vec{M}$, dado por el producto vectorial

$$\vec{M} = (A-O) \wedge \vec{P}$$

siendo A un punto cualquiera de la recta que contiene $\vec{P}$. Como producto vectorial que es, $\vec{M}$ es perpendicular al plano π y su sentido viene determinado por la regla del sacacorchos (y tal que avanza girando por la acción de P). Se ha dicho que A es un punto cualquiera; en efecto:

$$\vec{M} = (A-O) \wedge \vec{P} = \vec{d1} \wedge \vec{P} =$$
$$= (\vec{d2} + \vec{AA'}) \wedge \vec{P} = \vec{d2} \wedge \vec{P}$$

En particular, $\vec{M} = \vec{\Delta} \wedge \vec{P}$, siendo Δ la distancia de O a $\vec{P}$ (llamada a menudo brazo de palanca del vector).

También puede escribirse: $\vec{M} = \vec{P} \wedge (O - A)$

Si $\vec{P} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, y $A = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ es la expresión vectorial del punto A, siendo O el origen de coordenadas, podemos escribir

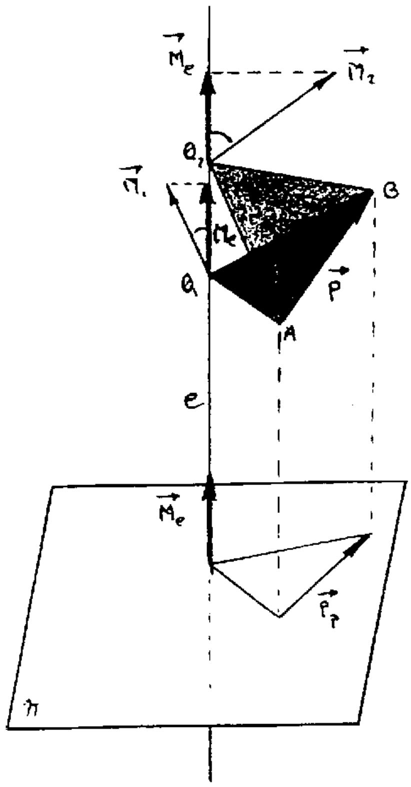
$$\vec{Mo} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \overbrace{(yZ - zY)}^{L}\vec{i} + \overbrace{(zX - xZ)}^{M}\vec{j} + \overbrace{(xY - yX)}^{N}\vec{k} =$$
$$= L\vec{i} + M\vec{j} + N\vec{k} \qquad [1]$$

A los números X, Y, Z, L, M, N se les denomina parámetros o coordenadas del vector $\vec{P}$; tales seis cantidades no son independientes entre sí puesto que están ligadas por la relación escalar $\vec{Mo} \cdot \vec{P} = LX + MY + NZ = 0$, ya que $\vec{Mo}$ y $\vec{P}$ son perpendiculares entre sí (producto escalar cero); es decir, el número de parámetros o coordenadas que fijan un vector deslizante es cinco.

Si tomamos momento respecto de un punto distinto del origen, de coordenadas (xo,yo,zo) el momento valdrá:

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x-xo & y-yo & z-zo \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = [(y - yo)Z - (z - zo)Y]\vec{i} + \ldots\ldots = L_{xo} \cdot \vec{i} + M_{yo} \cdot \vec{j} + N_{zo} \cdot \vec{k} \qquad [1']$$

5.2.- Momento de un vector respecto a un eje.- Se llama así al vector, $\vec{Me}$, que resulta de proyectar sobre el eje al momento del vector considerado respecto a un punto cualquiera de éste.



Para que esta definición sea válida es preciso que sea independiente del punto elegido, es decir, que las proyecciones sobre el eje sean las mismas.

En la figura adjunta se han tomado dos puntos, O1 y O2, y hallado sus momentos, $\vec{M1}$ y $\vec{M2}$, proyectándolos luego; sabemos que tales $\vec{M1}$ y $\vec{M2}$ son proporcionales a las áreas de los triángulos ABO1-ABO2 respectivamente; sus proyecciones sobre el eje serán proporcionales así mismo, a las proyecciones de esos triángulos sobre un plano π normal al eje, ambos iguales al triángulo determinado por Pp, proyección de $\vec{P}$, y el punto de intersección del eje con π; (téngase en cuenta que el ángulo entre $\vec{M1}$ y el eje es el mismo que entre ABO1 y π, por perpendicularidad; y lo mismo entre $\vec{M2}$ y el eje respecto ABO2 y π).

De aquí se desprende otra definición del momento respecto a un eje: es el momento del vector Pp que resulta de proyectar el dado sobre un plano normal al eje, res pecto al punto de intersección del eje y el plano.

El momento de un vector respecto a un eje será nulo cuando: 1°) el vector corta al eje; 2°) sea paralelo al eje (pues los M1, M2, ..., resultan normales a dicho eje y su proyección es nula).

De las ecuaciones [1] y [1'] anteriores se desprende que L, M, N son los momentos del vector $\vec{P}(X,Y,Z)$ respecto de los ejes coordenados Ox, Oy, Oz; y que los Lxo, Myo, Nzo lo son, así mismo, respecto a los ejes paralelos a los coordenados por el punto (xo,yo,zo).

Por otra parte, si $\vec{Mo1}$ es el momento respecto a un punto O1 del eje, y $\vec{e}$ es un vector unitario del eje, recordando propiedades de los vectores:

$$\vec{Me} = (\vec{Mo1}\cdot\vec{e})\vec{e} \quad ; \begin{cases} \vec{Mo1} = Lo1\cdot\vec{i} + Mo1\cdot\vec{j} + No1\cdot\vec{k} \\ \vec{e} = l\cdot\vec{i} + m\cdot\vec{j} + n\cdot\vec{k} \end{cases} \quad ; \text{ luego}$$

$$\vec{Me} = (Lo1\cdot l + Mo1\cdot m + No1\cdot n)x(l\cdot\vec{i} + m\cdot\vec{j} + n\cdot\vec{k})$$

siendo l, m, n los cosenos directores de $\vec{e}$.

5.3.- <u>Sistemas de vectores</u>.- Sean $\vec{P1}$, $\vec{P2}$, ..., $\vec{Pi}$, vectores con puntos de aplicación en A1, A2,.....,Ai, respectivamente; a un conjunto tal se le denomina sistema de vectores.

Se denomina resultante del sistema al vector $\vec{R} = \vec{P1} + \vec{P2} + ... + \vec{Pi}$, suma geométrica de los vectores equipolentes a los dados.

Se llama momento resultante del sistema respecto a un punto O al vector $\vec{M}$ que resulta de sumar los momentos $\vec{M1}$, $\vec{M2}$, ..., de cada vector del sistema respecto al mismo punto O; este punto O se llama centro de reducción.

Analíticamente tendremos:

$$\text{vectores } \vec{Pk} = Xk\cdot\vec{i} + Yk\cdot\vec{j} + Zk\cdot\vec{k}, \quad (\text{ para } k = 1,2,...,n)$$

$$\text{aplicados en } Ak = O + xk\cdot\vec{i} + yk\cdot\vec{j} + xk\cdot\vec{k}$$

(coordenadas de O => xo, yo, zo)

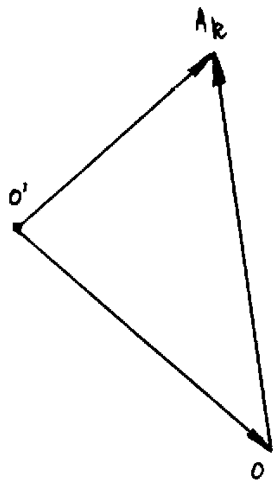
$$\vec{R} = \sum_1^n \vec{Pk} = [\sum_1^n Xk]\vec{i} + [\sum_1^n Yk]\vec{j} + [\sum_1^n Zk]\vec{k};$$

$$\vec{M} = \sum_1^n \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ xk - xo & yk - yo & zk - zo \\ Xk & Yk & Zk \end{vmatrix}$$

Si se conocen $\vec{R}$ y el momento $\vec{M}$ del sistema respecto a un punto 0, puede determinarse el momento del sistema respecto a otro punto cualquiera 0' mediante el siguiente teorema:

El momento, $\vec{M'}$, del sistema respecto a un punto 0' es la suma goemétrica de su momento, $\vec{M}$, respecto a 0, y del momento, $\vec{MR}$, respecto a 0', de su resultante en 0; es decir:

$$\vec{M'} = \vec{M} + (0 - 0') \wedge \vec{R}$$



en efecto; de la definición primera:

$$\vec{M} = \sum_1^n (Ak - 0) \wedge \vec{Pk}; \quad \vec{M'} = \sum_1^n (Ak - 0') \wedge \vec{Pk}$$

pero (ver figura):

$$Ak - 0' = (Ak - 0) + (0 - 0')$$

que en la segunda ecuación queda

$$\vec{M'} = \sum_1^n (Ak - 0) \wedge \vec{Pk} + \sum_1^n (0 - 0') \wedge \vec{Pk} =$$

$$= \vec{M} + (0 - 0') \wedge \sum_1^n \vec{Pk} = \vec{M} + (0 - 0') \wedge \vec{R}$$

5.4.- <u>Invariantes de un sistema de vectores</u>.- Entenderemos por invariantes aquellas cantidades, comunes al sistema, cuyo valor es independiente del punto a que se refieren, es decir, independientes del punto de reducción.

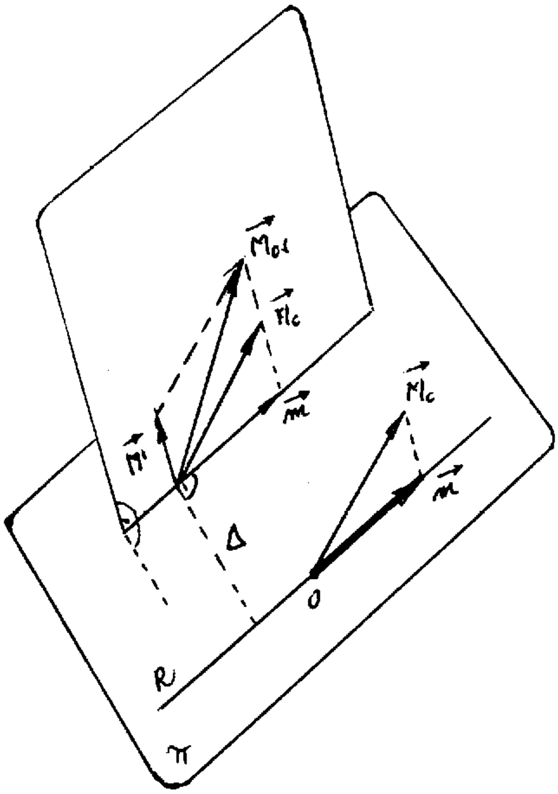
Primer invariante: su resultante, $\vec{R} = [\sum_1^n Xk]\vec{i} + [\sum_1^n Yk]\vec{j} + [\sum_1^n Zk]\vec{k}$, *vector libre; son también invariantes el módulo de $\vec{R}$, su dirección y sentido, o lo que es lo mismo, cada componente de $\vec{R}$.*

Segundo invariante: el producto escalar $Mo \cdot R = Mo' \cdot R$ (véase cuestión siguiente).
Tercer invariante: su momento mínimo, proyección de $\vec{M}$ sobre $\vec{R}$,

$$m = \frac{\vec{M} \cdot \vec{R}}{|\vec{R}|} \quad \text{(véase también cuestión siguiente)}$$

5.5.- *__Momento mínimo__.-Sean $\vec{R}$ y $\vec{Mo}$ la **resultante** y el momento respecto a un punto 0 de un sistema de vectores; sabemos, por estudios precedentes, que respecto de otro nuevo punto 01*

$$\vec{Mo1} = \vec{Mo} + (0 - 01) \wedge \vec{R}$$



Sea π el plano determinado por 01 y R, recta base de $\vec{R}$ por 0; si $\vec{M'} = (0 - 01) \wedge \vec{R}$, será perpendicular a dicho plano π (por producto vectorial);por lo tanto,y tal como se ve en la figura, las proyeccciones de $\vec{Mo}$ y $\vec{Mo1}$ sobre las paralelas a R por 0 y 01 son iguales; tales proyecciones, m, iguales para cualquier punto del espacio, se llaman momento mínimo (en seguida veremos el porqué de esa denominación).

Este mismo resultado se puede obtener multiplicando escalarmente por $\vec{R}$ los dos miembros de la expresión (que de paso demuestra los invariantes segundo y tercero, más arriba citados):

$$\vec{Mo1} = \vec{Mo} + (0 - 01) \wedge \vec{R};$$

$$\vec{Mo1} \cdot \vec{R} = \vec{Mo} \cdot \vec{R} + \underbrace{[(0 - 01) \wedge \vec{R}] \cdot \vec{R}}_{=0} =$$

$$= \vec{Mo} \cdot \vec{R}$$

El valor nulo procede de ser

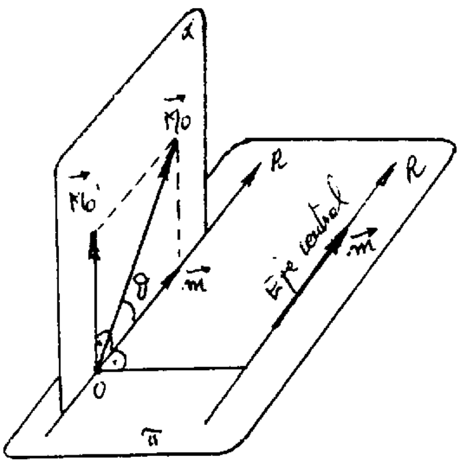
un producto mixto y con dos vectores iguales. Por tanto:

$\vec{Mo}\cdot\vec{R}$ *= const.=* $Mo\cdot R\cdot\cos\alpha = m\cdot R;$ $\qquad m = \dfrac{\vec{Mo}\cdot\vec{R}}{|\vec{R}|} = \dfrac{\vec{Mo1}\cdot\vec{R}}{|\vec{R}|}$

5.6.- *Eje central.-Recibe este nombre la recta lugar geométrico de los puntos respecto de los cuales el momento resultante de un sistema de vectores tiene la misma dirección que su resultante.*

Sean $\vec{R}$ *y* $\vec{Mo}$ *la resultante y el momento del sistema respecto a un punto O; descompongamos* $\vec{Mo}$ *en la dirección de* $\vec{R}$ *y en otra perpendicular,* $\vec{Mo'}$*, tal que* $\vec{Mo} = \vec{Mo'} + \vec{m}$*, siendo* $\vec{m}$ *el momento mínimo;se determina así el plano α por O, que contiene a* $\vec{m}$*,* $\vec{Mo}$ *y* $\vec{Mo'}$*.*

Tracemos por O la perpendicular al plano α, y situemos la resultante $\vec{R}$ *en un punto A de dicha perpendicular a una distancia, tal que* $Mo' = R\cdot\Delta$*; respecto a este punto A el momento resultante del sistema sea* $\vec{MA}$ *(no dibujado en la figura); y calculando el momento respecto al punto O a partir del* $\vec{MA}$ *tendríamos:*



$$\vec{Mo} = \vec{MA} + (A - O)\wedge\vec{R} = \vec{MA} + \underbrace{\vec{\Delta}\wedge\vec{R}}_{M_o'} =$$

$$= \vec{MA} + \vec{\Delta}\cdot R = \vec{MA} + \vec{Mo'}$$

Pero hemos visto que $\vec{Mo} = \vec{Mo'} + \vec{m}$

luego $\vec{MA} = \vec{m}$

La aplicación a otro cualquier A' de la recta que pasa por A, da

$$\vec{MA'} = \vec{MA} + (A - A')\wedge\vec{R} = \vec{m} + 0,$$

es decir, el mismo resultado.

Así mismo, respecto a otro punto exterior a la recta por A, un punto B, daría $\vec{MB} = \vec{MA} + (\vec{A} - B)\wedge\vec{R} = \vec{m} + (\neq 0) \neq \vec{m}$*, que no podría tener la dirección de* $\vec{m}$*.*

En resumen, que la recta AR es el lugar geométrico referido.

Se ve que $\vec{m}$ *es el momento menor de todos los posibles, lo cual justifica que le llamaramos "mínimo". De paso, el cálculo de* Δ *se hace:*

$$m = Mo \cdot \cos\theta \; ; \qquad Mo' = R \cdot \Delta = Mo \cdot \operatorname{sen}\theta \; ; \qquad \Delta = \frac{Mo \cdot \operatorname{sen}\theta}{R} \qquad [2]$$

5.7.- *Ecuación del eje central.*-Sea un sistema de vectores, $\vec{R}$ su resultante y $\vec{Mo}$ el momento resultante respecto del origen de coordenadas (ver fórmula [1]); sea $O'(x,y,z,)$ un punto del eje buscado, que, por otra parte ha de ser paralelo a $\vec{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{Mo} = L\cdot\vec{i} + M\cdot\vec{j} + N\cdot\vec{k} \\ \vec{R} = X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k} \\ O - O' = -x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k} \end{array}\right\} \qquad \vec{Mo'} = \vec{Mo} + (O - O')\wedge\vec{R} =$$

$$= L\cdot\vec{i} + M\cdot\vec{j} + N\cdot\vec{k} - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$\frac{L - [y\cdot Z - z\cdot Y]}{X} = \frac{M - [z\cdot X - x\cdot Z]}{Y} = \frac{N - [x\cdot Y - y\cdot X]}{Z}$$

5.8.- *Algunas aplicaciones del eje central.*- Dado un sistema de vectores, el conjunto de momentos resultantes respecto a los distintos puntos del espacio admite una distribución simétrica y cilíndrica respecto al eje central. En efecto (ver figura en pág. sig.):

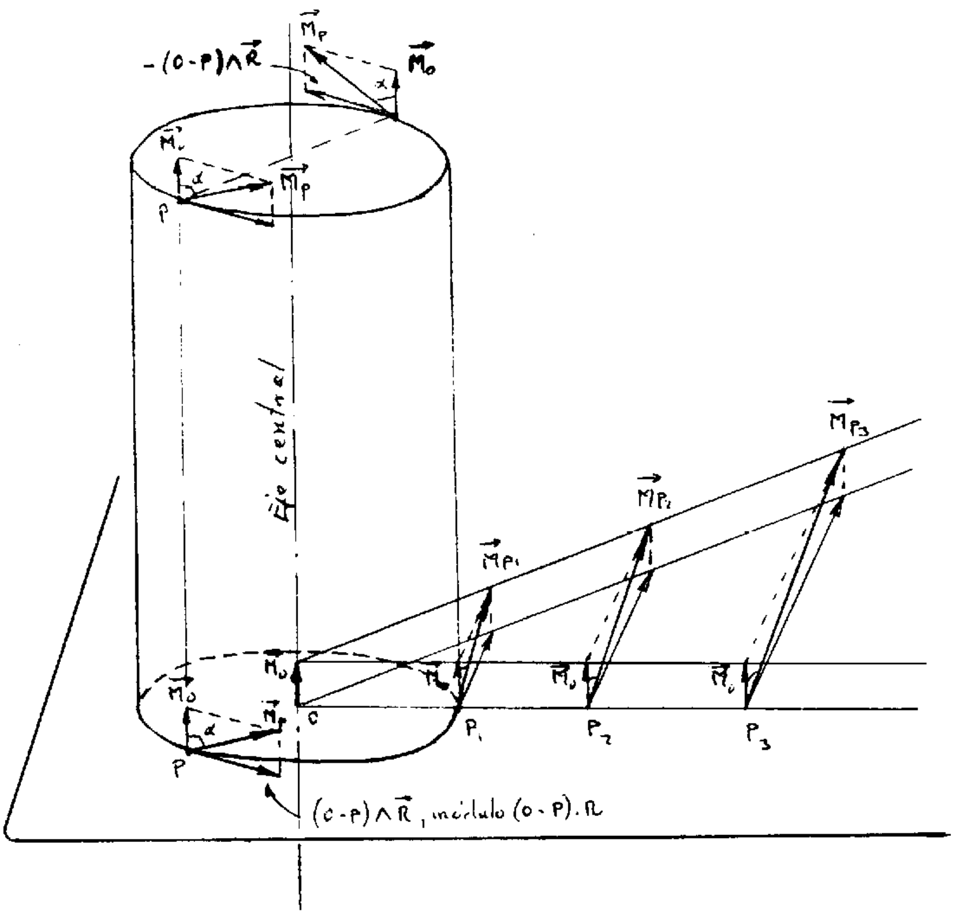
El momento respecto a un punto, P, es, si O es el pie de la perpendicular desde P al eje central, $\vec{Mp} = \vec{Mo} + (O - P)\wedge\vec{R} = \vec{m} + (O - P)\wedge\vec{R}$, en donde $(O - P)\wedge\vec{R}$ es perpendicular al plano determinado por P y el eje central y su módulo proporcional a la distancia $\overline{O - P}$. Por tanto:

1°)Los momentos de todos los puntos situados sobre una superficie cilíndrica coaxial con el eje central tienen igual módulo; si bien, mientras $\vec{Mo}$ es el mismo, $(O - P)\wedge\vec{R}$ depende de la orientación de $(\overline{O - P})$.

2°) Todos los puntos de una paralela al eje central, generatriz de un cilindro que pasa por ellos, tienen igual momento [igual valor $(O - P)\wedge\vec{R}$].

3°) $$tg\alpha = \frac{|(O - P)\wedge\vec{R}|}{|\vec{Mo}|} = \frac{(O - P)\cdot R}{Mo} = k\cdot(O - P), \text{ es decir,}$$

$tg\alpha$ es proporcional a la distancia al eje. En la figura anterior, P1, P2, P3,. ...,tienen el mismo $\vec{Mo}$, y la otra componente varía según (O - P1).R, (O - P2).R, (O - P3).R,....



5.9.- <u>Generalización del teorema de Varignon</u>.- Si $\vec{m}$ es el momento mínimo de un sistema de vectores y O un punto de su eje central, en el supuesto de que aquel momento mínimo sea nulo, tendremos:

$$\vec{Mo'} = \vec{Mo} + (O - O') \wedge \vec{R} = \vec{m} + (O - O') \wedge \vec{R} = (O - O') \wedge \vec{R}$$

Es decir, el momento resultante del sistema respecto a un punto cualquiera, O', será el momento de su resultante, $\vec{R}$, aplicada en un punto, O, de su eje central. Tal será los tres *casos que vamos a analizar a continuación (vectores concurrentes, paralelos y coplanarios).*

5.10.- *<u>Vectores concurrentes</u>.- Consideremos un sistema de vectores, concurrentes; evidentemente, el momento resultante del sistema respecto al punto de concurrencia es nulo; es decir, el momento mínimo del sistema es cero.*

El eje central será, pues, la recta que define la resultante aplicada en aquel punto de concurrencia; y se cumplirá el teorema clásico de Varignon: el momento resultante de un sistema de vectores concurrentes respecto a un punto cualquiera será igual al momento de su resultante aplicada en el punto de concurrencia respecto al nuevo punto.

5.11.- *<u>Vectores paralelos</u>.- Sea un sistema de vectores paralelos todos ellos a una dirección común, cuya resultante no sea nula.*

También en este caso su momento mínimo será nulo, pues los momentos de todos los vectores del sistema respecto a un punto cualquiera serán perpendiculares a la resultante; siéndolo, por tanto, su suma geométrica; y la proyección sobre la resultante, momento mínimo, será nula.

Nos resta hallar el eje del sistema que, evidentemente, será paralelo a la resultante. Vamos a definier el centro de vectores paralelos y veremos que el eje central pasa por él.

Sean $\vec{P1}$, $\vec{P2}$, $\vec{P3}$,.....,los vectores, aplicados respectivamente en los puntos A1(x1,y1,z1), A2(x2,y2,z2), A3(x3,y3,z3),....; sea G(xg,yg,zg) el centro de vectores paralelos, que vamos a definir de la siguiente forma:

$$P1\cdot(A1 - G) + P2\cdot(A2 - G) + P3\cdot(A3 - G) + \ldots\ldots = 0 \qquad [3]$$

$$\text{en donde} \begin{cases} P1,\ P2,\ P3,\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \text{módulos} \\ (A1 - G),\ (A2 - G),\ (A3 - G),\ \ldots, & \text{vectores} \end{cases}$$

Si proyectamos la anterior ecuación vectorial sobre el eje 0-x, la ecuación se seguirá manteniendo:

$$P1\cdot(x1 - xg) + P2\cdot(x2 - xg) + P3\cdot(x3 - xg) + \ldots\ldots\ldots = 0 \qquad ==>$$

$$xg = \frac{x1 \cdot P1 + x2 \cdot P2 + \ldots.}{P1 + P2 + \ldots\ldots.} = \frac{\Sigma(xk \cdot Pk)}{R}$$

Y, en general, de la misma forma:

$$xg = \frac{\Sigma(xk \cdot Pk)}{R}, \quad yg = \frac{\Sigma(yk \cdot Pk)}{R}, \quad zg = \frac{\Sigma(zk \cdot Pk)}{R}$$

Ahora podemos escribir vectorialemente:

$$G - 0 = xg \cdot \vec{i} + yg \cdot \vec{j} + zg \cdot \vec{k} = \frac{1}{R} \Sigma\, Pk \cdot [xk \cdot \vec{i} + yk \cdot \vec{j} + zk \cdot \vec{k}] =$$

$$= \frac{1}{R} \Sigma\, Pk \cdot (Ak - 0) \qquad \Longrightarrow \qquad R(G - 0) = \Sigma\, Pk(Ak - 0)$$

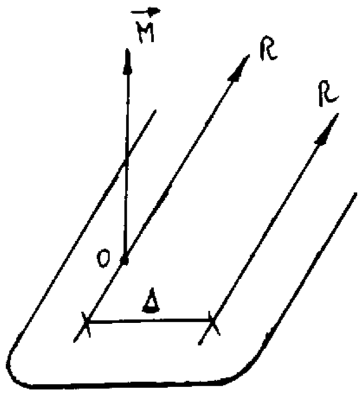
Si buscamos un punto del eje central, tal como C, como el momento resultante del sistema respecto de este punto debe ser nulo, podemos escribir:

$$\Sigma\, (Ak - C) \wedge \vec{Pk} = 0 = \Sigma\, (Ak - C) \wedge Pk \cdot \vec{u} = \Sigma\, Pk \cdot (Ak - C) \wedge \vec{u}$$

siendo $\vec{u}$ un vector unitario que tiene la dirección de $\vec{Pk}$; comparando esta última expresión con la [3] arriba usada para definir el centro de vectores paralelos, vemos que el mismo punto G pertenece al eje; por lo tanto, su ecuación analítica es

$$\frac{x - xg}{Rx} = \frac{y - yg}{Ry} = \frac{z - zg}{Rz} \qquad \Longrightarrow \text{ecuac. eje central}$$

5.12.- <u>Vectores coplanarios.- También en este caso el momento mínimo es nulo; en efecto:</u> sea un sistema de vectores $\vec{P1}$, $\vec{P2}$, ..., todos en un mismo plano. Al tomar momentos respecto de un punto cualquiera, 0, de dicho plano, todos los momentos $\vec{M1}$, $\vec{M2}$, ..., serán normales al referido plano, así como su suma, $\vec{M} = \vec{M1} + \vec{M2} + \ldots.$, que lo será también a la resultante, $\vec{R} = \vec{P1} + \vec{P2} + \ldots..$, y nula la proyección de $\vec{M}$ sobre $\vec{R}$.



Una vez hallado el momento $\vec{M}$, del sistema respecto a un punto 0 el eje central estará en una paralela a R y a una distancia tal que $M = \Delta \cdot R$

(ver fórmula [2]) $\Delta = \dfrac{M}{R}$

5.13.- *Sistemas equivalentes.- Se dice que dos sistemas son equivalentes cuando sus resultantes son iguales y cuando sus momentos resultantes respecto a un mismo punto también lo son.*

Puesto que, en virtud de $\vec{Mo'} = \vec{Mo} + (0 - 0') \wedge \vec{R}$, también serán los momentos iguales respecto a cualquier otro nuevo punto.

La definición de equivalencia satisface los axiomas reflexivo, siméetrico y transitivo; es decir, la equivalencia tiene las mismas propiedades de la igualdad aritmética respecto a la suma, resta y producto por un número real.

Las operaciones que transforman un sistema en otro equivalente son:

1°) traslación de vectores sobre la recta de acción.

2°) supresión de dos vectores de igual módulo, línea de acción común y sentidos opuestos.

3°) incorporación de dos vectores con las mismas condiciones anteriores.

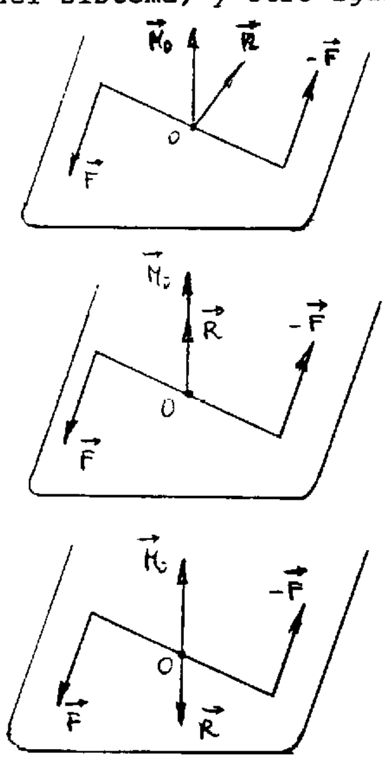
4°) sustitución de dos vectores, cuyas líneas de acción concurran en un punto, por su suma efectuada y situado sobre una línea de acción concurrente con las de los sumandos.

5°) operación inversa a la anterior, sustitución de un vector por otros concurrentes.

De todas estas operaciones, por otra parte sencillas y evidentes, se suele hacer frecuente uso en Estática para la resolución práctica de problemas.

5.14.- *<u>Reducción de un sistema y reducción canónica</u>.- Reducir un <u>sistema de vectores deslizantes es hallar otro equivalente</u> más sencillo.*

Como ya vimos, todo sistema puede reducirse al sistema formado por un vector, la resultante $\vec{R}$, aplicada en un punto arbitrario, 0, y un momento, $\vec{Mo}$, resultante del sistema respecto a 0. El momento $\vec{Mo}$ puede materializarse mediante un par único, $(\vec{F}, -\vec{F})$, equivalente a $\vec{Mo}$; para conseguirlo, basta aplicar en 0 un vector equipolente a cada uno $\vec{P1}$, $\vec{P2}$, ..., del sistema, y otro igual y de signo contrario, con lo cual el sistema no varía; los primeros dan $\vec{R}$ en 0; y, aparte, cada $\vec{Pi}$ y $-\vec{Pi}$ se agrupan en pares, que se suman.



En general, al hacer la reducción en un punto cualquiera del espacio, obtenemos una $\vec{R}$ y un $\vec{Mo}$ que no tienen la misma dirección (es decir, 0 no es del eje central). Si ambas direcciones coinciden, se llama canónica; y ya hemos visto que la condición necesaria y suficiente para que eso ocurra es que 0 sea un punto del eje central.

El conjunto de un vector y un par con eje coincidente se denomina torsor; si los sentidos de ambos coinciden se dice torsor a derechas y si son de sentido contrario torsor a izquierdas; se puede demostrar que se cumple:

torsor a derechas, $Lx + My + Nz > 0$

torsor a izqdas., $Lx + My + Nz < 0$

5.15.- *<u>Reducción de un sistema cuyo variante escalar es nulo</u>.- Es evidente que en lo que antecede se ha supuesto $m = (\vec{M}\cdot\vec{R})/R \neq 0$, es decir, $\vec{M}\cdot\vec{R} \neq 0$. Veamos la discusión cuando el sugundo variante es nulo, $\vec{M}\cdot\vec{R} = 0$; y caben varios casos:*

1°) $\vec{Mo} = 0$, $\vec{R} = 0$, $\vec{Mo'} = \vec{Mo} + (0 - 0')\wedge\vec{R} = 0$; *resulta un nuevo invariante, momento siempre nulo. Se dice que el sistema es equivalente a cero o que está en equilibrio estático (este caso es objeto de la Estática, precísamente).*

2°) $\vec{Mo} = 0$, $\vec{R} \neq 0$, $\vec{Mo'} = \vec{Mo} + (0 - 0')\wedge\vec{R} = \vec{Mo'}$, *y siempre $\vec{Mo'}$ resulta perpendicular a $\vec{R}$, salvo en 0, centro de reducción, en que el sistema se reduce a un vector. Este es el* caso estudiado de $\vec{m} = 0$, vectores concurrentes (en que el sistema es equivalente a su resultante aplicada en el punto de concurrencia), vectores paralelos (el sistema es equivalente a la resultante aplicada en el centro de vectores paralelos) y vectores coplanarios (sistema equivalente a su resultante aplicada en el eje central).

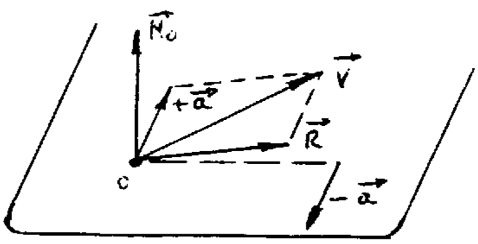
3°) $\vec{Mo} \neq 0$, $\vec{R} = 0$, $\vec{Mo'} = \vec{Mo} + (0 - 0') \wedge \vec{R} = \vec{Mo}$, invariante nuevamente, en que el sistema se reduce a un par, sea cualquiera el punto de reducción; por esta razón, $\vec{M} = \vec{Mo}$, recibe el nombre genérico de momento del par, sin hacer referencia a punto alguno; es decir, se considera como vector libre. Cuando un sistema está integrado por pares o por momentos, $\vec{M1}$, $\vec{M2}$, ..., éstos se suman vectorialmente, con independencia de su posición en el espacio, $\vec{M} = \vec{M1} + \vec{M2} + ...$ Por otra parte, un momento, $\vec{M}$, puede materializarse por pares de infinidad de modos, con tal que se cumpla $M = \Delta \cdot F$.

4°) $\vec{Mo} \neq 0$, $\vec{R} \neq 0$, pero tal que se siga cumpliendo $\vec{Mo'} \cdot \vec{R} = 0$, lo cual implica la perpendicularidad entre $\vec{Mo}$ y $\vec{R}$, cosa que es imposible en los puntos del eje central ($\vec{M} \parallel \vec{R}$), al cual nos estamos refiriendo para que $m = 0 = \vec{M} \cdot \vec{R}/R$; es decir, este caso solo existe para $\vec{Mo} \cdot \vec{R} \neq 0$.

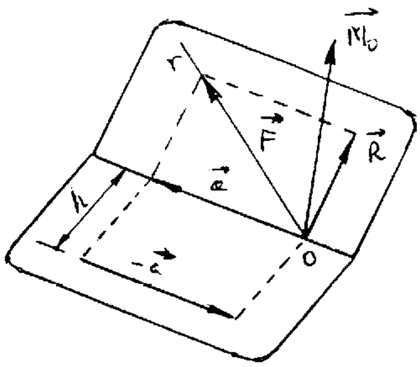
5.16.- Algunos problemas particulares.- 1°) Si un par o momento, $\vec{M}$, actúa sobre un cuerpo o sobre un eje real de giro, la parte de aquel momento que es efectiva para hacer girar el cuerpo respecto a dicho eje es, siendo $\vec{e}$ el vector unitario del eje:

$$\vec{Me} = (\vec{M} \cdot \vec{e})\, \vec{e}, \text{ proyección vectorial de } \vec{M} \text{ sobre el eje}$$

2°) un sistema de vectores cualquiera puede reducirse a dos vectores, uno de los cuales pase por un punto dado: basta reducir el sistema a su resultante, $\vec{R}$, y su momento total por 0, punto dado, $\vec{Mo}$; se descompone $\vec{Mo}$ en $\vec{a}$ y $-\vec{a}$ y se suman $\vec{a}$ y $\vec{R}$, tal que $\vec{a} + \vec{R} = \vec{V}$. $\vec{V}$ y $-\vec{a}$ son la solución.



3°) un sistema puede reducirse a dos, uno de ellos localizado en una recta dada, con la condición de no ser paralela a la resultante ni el sistema tener momento 0.

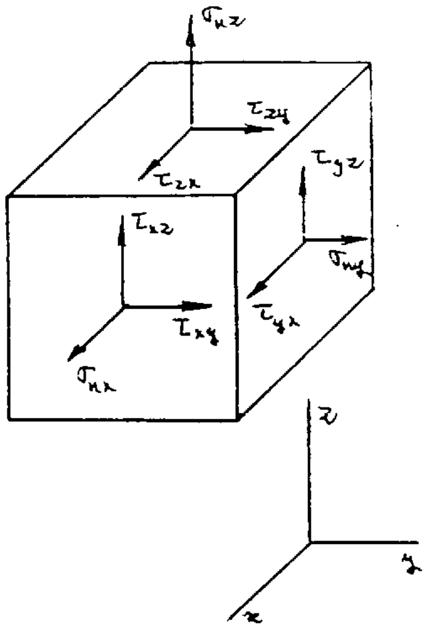


Por un punto, O de la recta dada, r, reducimos el sistema a $\vec{M}_O$ y $\vec{R}$; trazamos el plano $\pi 1$, perpendicular a $\vec{M}_O$ por O; y el plano $\pi 2$, que se forma entre r y $\vec{R}$; se halla la intersección de ambos. Sea $\vec{F}$, tal que $\vec{F} = \vec{a} + \vec{R}$, formando un paralelogramo sumatorio. En $\pi 1$, tomamos $-\vec{a}$ y a distancia $h = |\vec{M}_O| / |\vec{a}|$. El sistema propuesto es equivalente a $\vec{F}$ y $-\vec{a}$, evidentemente. $\vec{F}$ y $-\vec{a}$ se llaman rectas conjugadas. Se ve que si $\vec{R} || r$, $|\vec{a}| = 0$, $h = \infty$; y si $\vec{M}_O = 0$, $h = 0$.

TEMA VI

CÁLCULO TENSORIAL

6.1.- *Concepto de tensores de primero y segundo orden.- A menudo las definiciones abstractas son difícilmente asimiliables por el alumno. Tal ocurre con los conceptos de gradiente, circulación de un vector, etc., si no se asimila tales conceptos a aplicaciones técnicas concretas. Lo mismo ocurre con el concepto de tensor. Partamos, por tanto, a la inversa, analizando ajemplos aclaratorios:*



Cuando se estudia, en un prisma mecánico, el estado tensorial, aparecen en cada cara del prisma una tensión normal, σn,y dos cortantes, τ, relacionadas con los ejes como se ve en la figura adjunta,de tal modo que se forma la matriz de tensiones:

$$[\ T\ ] = \begin{vmatrix} \sigma nx & \tau xy & \tau xz \\ \tau yx & \sigma ny & \tau yz \\ \tau zx & \tau zy & \sigma nz \end{vmatrix}$$

Se estudia, así mismo, que para calcular el vector de tensiones σ (σx,σy,σz) correspondientes a una orientación genérica definida por el vector unitario $\vec{u}(\alpha,\beta,\Gamma)$, en donde α, ß, Γ son los cosenos directores de tal dirección, resulta la expresión matricial:

$$\begin{vmatrix} \sigma x \\ \sigma y \\ \sigma z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma nx & \tau xy & \tau xz \\ \tau yx & \sigma ny & \tau yz \\ \tau zx & \tau zy & \sigma nz \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \Gamma \end{vmatrix} \quad \Longrightarrow \quad [\ \sigma i\ ] = [\ T\ ]\cdot[\ \alpha i\ ]$$

o genéricamente:

$$(\ \tau xy = \tau yx\ ;\ \tau xz = \tau zx\ ;\ \tau yz = \tau zy) \qquad [\ Pi\ ] = [\ Aik\ ]\cdot[\ Bk\ ]$$

Aparecen aquí unas magnitudes Pi (i = 1, 2, 3) homogéneas, resultado de operaciones entre dos magnitudes, Aik(i = 1,2,3) y $B_k (k = 1,2,3)$, también homogéneas entre sí, pero pudiendo ser las P_i de distinta naturaleza que las A_{ik} y las B_k y aún estas entre sí (como ocurre en el ejemplo puesto).

En concreto, en nuestro caso los P_i son tensiones, lo mismo que los A_{ik}, pero los B_k son adimensionales.

De forma análoga, en el estudio de las deformaciones del mismo prisma mecánico anterior aparece la relación:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \epsilon_x & 1/2\cdot\Gamma_{xy} & 1/2\cdot\Gamma_{xz} \\ 1/2\cdot\Gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2\cdot\Gamma_{yz} \\ 1/2\cdot\Gamma_{zx} & 1/2\cdot\Gamma_{zy} & \epsilon_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \\ \Gamma \end{vmatrix} \implies$$

$$[\epsilon_i] = [D]\cdot[\alpha_i]$$

En la cual α, β, Γ tienen el mismo significado anterior; ϵ_x, ϵ_y, ϵ_z indican los alargamientos unitarios en las direcciones de los ejes coordenados respectivos y $\Gamma_{xy}(=\Gamma_{yx})$, $\Gamma_{xz}(=\Gamma_{zx})$, $\Gamma_{yz}(=\Gamma_{zy})$ representan las variaciones angulares experimentadas por ángulos inicialmente rectos de lados paralelos a los ejes x-y, x-z, y-z respectivamente. Finalmente, ϵ_1, ϵ_2, ϵ_3 son las deformaciones unitarias de la dirección genérica $\vec{u}$ (α, β, Γ).

En el moderno cálculo matricial de estructuras aparecen relaciones del tipo:

$$[\ F\ ] = [\ K\ ] \cdot [\ \delta\ ]$$

$$[\ \delta\ ] = [\ A\ ] \cdot [\ F\ ]$$

En las cuales [F] son matrices simples, que representan esfuerzos genéricamente (fuerzas, momentos flectores o torsores); [δ] son también matrices simples representando deformaciones (lineales o angulares indistintamente); y las [K] y [A] son las matrices de segundo orden de rigidez y flexibilidad respectivamente, que tienen un significado físico de "<u>deformación unitaria</u>" la primera y "<u>esfuerzo unitario</u>" la segunda, pero en una y otra siempre los distintos elementos son de magnitudes homogéneas.

Pues bién, se denomina tensor de segundo orden al conjunto de magnitudes A_{ik}:

$$\begin{matrix} A11 & A12 & A13 & \cdots & A1n \\ A21 & A22 & A23 & \cdots & A2n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ An1 & An2 & An3 & \cdots & Ann \end{matrix}$$

en el que las componentes A11, A22, ...,Ann se llaman principales o diagonales y secundarias el resto. Y se denomina, análogamente, tensor de primer orden a cualquiera de los

$$\begin{matrix} P1 & & B1 \\ P2 & & B2 \\ . & & . \\ . & & . \\ Pn & & Bn \end{matrix}$$

escribiéndose simbólicamente $Pi = Aik \cdot Bk = \sum_{k=1}^{k=n} [Aik \cdot Bk]$ y expresando que el tensor de primer orden Pi es el producto interior del tensor de segundo orden Aik por el de primero Bk. O dicho de otro modo:

"Si un conjunto de n^2 magnitudes, Aik, homogéneas entre sí, es tal que su producto interior por otro grupo Bk, de n magnitudes homogéneas, nos da las n magnitudes Pi de la misma naturaleza, diremos que las Aik definen un tensor doble y las Bk y Pi otros dos tensores de primer orden cada una de ellas".

Esto significa en el cálculo:

$$\begin{aligned} P1 &= A11 \cdot B1 + A12 \cdot B2 + \cdots + A1n \cdot Bn \\ P2 &= A21 \cdot B1 + A22 \cdot B2 + \cdots + A2n \cdot Bn \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad [\ 1\ ] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Pn &= An1 \cdot B1 + An2 \cdot B2 + \cdots + Ann \cdot Bn \end{aligned}$$

En particular, para $n = 3$, resultan tres ecuaciones y el tensor Aik tiene nueve componentes. En este caso las magnitudes Bk y Pi se pueden asociar, al tener tres componentes, a dos vectores en un espacio tridimensional y el tensor Aik se denomina, así mismo, doble tridimensional. Para $n = 2$, Bk y Pi son vectores planos y Aik es un tensor doble bidimensional; si $n = 1$, solo hay un valor para cada una de las magnitudes, que son por eso simples escalares. Los vectores son, pues, tensores de primer orden y las magnitudes escalares tensores de orden cero. Para $n > 3$ los tensores Bk y Pi se denominan hipertensores en un espacio de n dimensiones; nos limitaremos a hablar de los tensores simples y dobles.

Se denominan, respectivamente, tensores isótropo (o escalar), tensor unidad y tensor conjugado a los siguientes:

$$\begin{vmatrix} T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T \end{vmatrix} = [\ T\ ]$$

(isótropo: todas las componentes principales iguales y el resto nulas)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = [\ I\ ]$$

(unidad: vector isótropo de componentes principales iguales a la unidad; se puede comprobar que cualquier tensor simple por el tensor unidad da el mismo tensor, es decir, $Bi = [\ I\ ]\cdot Bk$)

$$\begin{vmatrix} A11 & A21 & \cdots & An1 \\ A12 & A22 & \cdots & An2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A1n & A2n & \cdots & Ann \end{vmatrix}$$

(conjugado o también transpuesto: el que sus componentes Aki provienen del Aik)

Si llamamos $|\ A\ |$ al determinante del sistema [1], $|\ Ak\ |$ al que resulta de sustituir la columna k y Δik a los menores adjuntos transpuestos correspondientes:

$$|Ak| = \begin{vmatrix} A11 & A12 & \ldots & P1 & \ldots & A1n \\ A21 & A22 & \ldots & P2 & \ldots & A2n \\ \ldots & & & & & \ldots \\ \ldots & & & & & \ldots \\ An1 & An2 & \ldots & Pn & \ldots & Ann \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} Pi \cdot \Delta ik$$

$$Bk = \frac{|Ak|}{|A|} = \sum_{i=1}^{n} Pi \cdot \frac{|\Delta ik|}{|A|}$$; *llamando tensor recíproco a*

$$A^{ik} = \frac{\Delta ik}{|A|}$$ *resulta* $Bk = A^{ik} \cdot Pi$,

que procede de $Pi = Aik \cdot Bk$

El hecho de denominarse recíprocos es porque su producto es el tensor unidad, según se demuestra en la teoría de determinantes; es decir:

$$A^{ik} \cdot Aik = I$$

Un tensor doble tal que todas sus componentes $Aik = Aki$ *(iguales todas las componentes secundarias simétricamente colocadas respecto a la diagonal principal) se denomina simétrico.*

Si todas las componentes secundarias son nulas, el tensor se denomina simétrico diagonal; el tensor isótropo es un caso particular.

Si ocurre que todas las componentes $Aik = -Aki$, *es decir, que las componentes opuestas son simétricas, se llama hemisimétrico; en este caso, como* $Aii = -Aii$; $2Aii = 0$, *los elementos de la diagonal principal son todos nulos.*

6.2.- *Vectores afines.- Cuando un vector,* $\vec{Q}$, *se obtiene como producto de un tensor T por otro vector* $\vec{P}$ *se dice que ambos vectores son afines; es decir, si*

$$\vec{Qi} = Tik \cdot Pk$$

Es el caso de los ejemplos comentados al principio con las tensiones o deformaciones; para el caso de tensiones, en concreto:

$$\sigma x = \sigma nx \cdot \alpha + \tau xy \cdot \beta + \tau xz \cdot \Gamma$$

$$\sigma y = \tau xy \cdot \alpha + \sigma ny \cdot \beta + \tau yz \cdot \Gamma$$

$$\tau z = \tau xz \cdot \alpha + \tau yz \cdot \beta + \sigma nz \cdot \Gamma$$

Si los valores de σx, σy, σz coinciden en dirección con los propios ejes de $u(\alpha, \beta, \Gamma)$ tendremos que $\sigma x = \sigma \cdot \alpha$, $\sigma y = \sigma \cdot \beta$, $\sigma z = \sigma \cdot \Gamma$, es decir

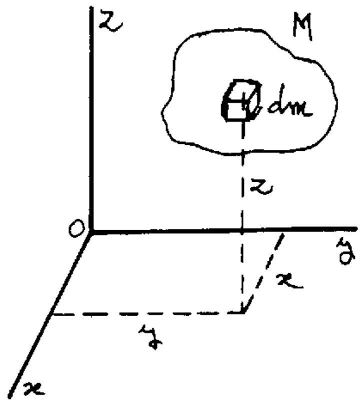
$$\left.\begin{array}{l} \sigma \cdot \alpha = \sigma nx \cdot \alpha + \tau xy \cdot \beta + \tau xz \cdot \Gamma \\ \sigma \cdot \beta = \tau xy \cdot \alpha + \sigma ny \cdot \beta + \tau yz \cdot \Gamma \\ \sigma \cdot \Gamma = \tau xz \cdot \alpha + \tau yz \cdot \beta + \sigma nz \cdot \Gamma \end{array} \right| \begin{array}{l} (\sigma nx - \sigma)\alpha + \tau xy \cdot \beta + \tau xz \cdot \Gamma = 0 \\ \tau xy \cdot \alpha + (\sigma ny - \sigma)\beta + \tau yz \cdot \Gamma = 0 \\ \tau xz \cdot \alpha + \tau yz \cdot \beta + (\sigma nz - \sigma)\Gamma = 0 \end{array}$$

El último sistema, unido a la condición de ortogonalidad de los ejes, $\alpha^2 + \beta^2 + \Gamma^2 = 0$, permite calcular las incognitas α, β, Γ, σ de gran valor en la teoría de direcciones principales de fatigas y deformaciones en Resistencia de Materiales o de ejes principales de inercia en la Mecánica clásica. Sobre lo primero remitimos al alumno que estudie la materia citada; y sobre lo segundo tendrá ocasión de comprobarlo en nuestra misma materia. La condición de compatibilidad del último sistema propuesto:

$$\begin{vmatrix} \sigma nx - \sigma & \tau xy & \tau xz \\ \tau xy & \sigma ny - \sigma & \tau yz \\ \tau xz & \tau yz & \sigma nz - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

dará tres valores de σ (valores principales del tensor σi), que, sustituidos en el mismo sistema citado, proporcionarán tres grupos de valores que definen las direcciones principales, $(\alpha 1, \beta 1, \Gamma 1)$, $(\alpha 2, \beta 2, \Gamma 2)$, $(\alpha 3, \beta 3, \Gamma 3)$.

6.3.- *Transformaciones tensoriales*.- Volvemos a ceñirnos a un caso concreto para hacer más asequible el concepto; nos referimos al tensor de inercia de un cuerpo, que se estudiará en Mecánica:



$$Ixx = \int (y^2 + z^2)\,dm \qquad Ixy = \int x\ y\ dm$$

$$Iyy = \int (x^2 + z^2)\,dm \qquad Ixz = \int x\ z\ dm$$

$$Izz = \int (x^2 + y^2)\,dm \qquad Iyz = \int y\ z\ dm$$

$$\text{tensor de inercia} = \begin{vmatrix} Ixx & (-Ixy) & (-Ixz) \\ (-Ixy) & Iyy & (-Iyz) \\ (-Ixz) & (-Iyz) & Izz \end{vmatrix}$$

Ocurre a menudo, en una transformación de ejes coordenados, tener necesidad de calcular el nuevo tensor tomando como base el primitivo. En nuestro caso, a partir de los momentos de inercia ya calculados, tener que calcular los nuevos respecto a otros ejes girados, x'-y'-z'. Sean ax'x, ax'y, ax'z los cosenos directores de x' respecto a los primitivos x, y, z; y ay'x, ay'y, ay'z, análogamente, los de y' respecto de los mismos primitivos. Se demuestra que:

$$Ix'x' = a^2x'x \cdot Ixx + a^2x'y \cdot Iyy + a^2x'z \cdot Izz +$$

$$+ 2 \cdot ax'x \cdot ax'y \cdot (-Ixy) + 2 \cdot ax'x \cdot ax'z \cdot (-Ixz) + 2 \cdot ax'y \cdot ax'z \cdot (-Iyz)$$

En general, para un tensor Aij (A11, A12, A13, A21, A22, ...) la anteior escritura se condensa, observando la ley de formación, en la fórmula (k es la x' de arriba; i = x, y, z; j = x, y, z)

$$Akk = - \sum_j \sum_i aki \cdot akj \cdot Aij$$

Y de la misma manera para Ix'y' se obtiene la fórmula

$$
\begin{aligned}
- Ix'y' = {} & ax'x \cdot ay'x \cdot Ixx + ax'y \cdot ay'y \cdot Iyy + ax'z \cdot ay'z \cdot Izz + \\
& + (ax'x \cdot ay'y + ax'y \cdot ay'x)(-Ixy) + \\
& + (ax'x \cdot ay'z + ax'z \cdot ay'x)(-Ixz) + \\
& + (ax'y \cdot ay'z + ax'z \cdot ay'y)(-Iyz)
\end{aligned}
$$

que se puede condensar, como en el caso anterior y con la misma nomenclatura, en (k es ahora x' y q es y'):

$$Akq = - \sum_j \sum_i aki \cdot aqj \cdot Aij$$

Como se aprecia, la segunda fórmula condensada abarca también la primera, si $q = k$.

Nota final.- Hemos pretendido solamente iniciar al alumno de nuestra Escuela Universitaria Politécnica; no se pretende más profundidad del tema. Remitimos a obras especializadas para el estudio de derivación, operaciones tensoriales superiores, sistemas covariantes y contravariantes, campos tensoriales, etc..