DINÁMICA: CINEMÁTICA Y CINÉTICA. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS FUNDAMENTALES.

Javier Pajon Permuy.

DINÁMICA: CINEMÁTICA Y CINÉTICA. CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS FUNDAMENTALES.

Pajón, Javier y Dávila, Juan Antonio.

UNIDAD DIDÁCTICA III:
DINÁMICA: CINEMÁTICA Y CINÉTICA.

TEMA XV

CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA; MOVIMIENTOS FUNDAMENTALES

15.1.- *Introducción*.- La Dinámica moderna se divide en dos partes: 1) *Cinemática*, que estudia los movimientos sin referirse a las causas de los mismos (solamente las trayectorias, desplazamientos, velocidades y aceleraciones). 2) *Cinética*, que estudia la relación entre fuerzas que actúan en los cuerpos y sus movimientos; es decir, permite predecir el movimiento causado por unas fuerzas dadas o, a la inversa, determinar las fuerzas necesarias para producir determinados movimientos.

15.2.- *Tiempo, trayectoria y ecuaciones del movimiento; velocidad y aceleración*.- Decimos que un cuerpo se mueve cuando cambia de posición, lo cual significa implícita o explícitamente la existencia de un sistema de referencia al cual referimos el movimiento (es decir, al cual referimos el cambio de posición). En principio, consideraremos como sistema de referencia un triedro trirectángulo Oxyz (fijo, mientras no se indique lo contrario).

Sin entrar en disquisiciones de carácter filosófico, consideraremos el tiempo cinemático simplemente como un parámetro, del cual depende la posición de un punto móvil, $A(x,y,z)$ respecto al sistema de referencia; tal parámetro, t, supondremos que es medible, que varía uniformemente de $-\infty$ a $+\infty$ y que puede ser puesto en correspondencia con los puntos de una recta.

Trayectoria es la línea ideal que describe el punto respecto al sistema de referencia; dicho vulgarmente, es el camino, es la "carretera" que sigue un vehículo; como tal línea, es una ecuación matemática, que se puede definir:

1º) como intersección de dos superficies (en el espacio)

$$f1(x,y,z) = 0$$
$$f2(x,y,z) = 0$$

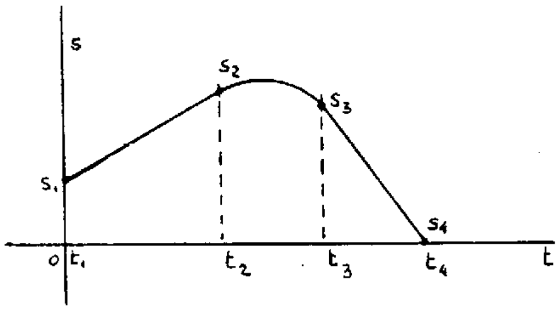
2º) en función de un parámetro, dando las coordenadas x, y, z del punto en función de ese parámetro (que habitualmente es el tiempo, aunque puede ser qualquier otro genérico):

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

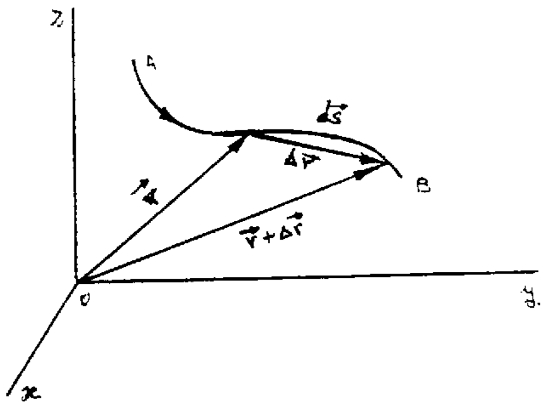
Existe otro concepto importante, que se suele confundir con la trayectoria, pero que no es tal trayectoria; es "la cantidad" de camino recorrido, la posición del punto a partir de uno de referencia:

$$s = s(t)$$

que da, para cada valor de t, el camino recorrido, s, a partir de un cierto origen. En la gráfica aquí adjunta la línea no es una trayectoria o camino, que no se conoce; la misma solamente da que: 1º) en el origen de tiempos (t1 = 0) el móvil está a la distancia s1 del origen; 2º) que hasta el tiempo t2 se va alejando de modo proporcional al tiempo y hasta la distancia s2; 3º) que llega a un alejamiento máximo y vuelve a acercarse al origen hasta t3, s3, retornando a dicho origen al cabo del tiempo t4; insistimos, sin estar definida la trayectoria (que puede ser rectilínea o curvilínea).



Considerando una partícula moviéndose a lo largo de una trayectoria arbitraria desde A hasta B, figura abajo adjunta, si $\vec{r}$ es el vector de posición en el tiempo t y $\vec{r} + \Delta\vec{r}$ el vector de posición en el tiempo t + Δt, definimos los siguientes conceptos:



1) *desplazamiento en el tiempo* Δt . . . . $\Delta\vec{r}$

(en el límite, cuando $t \longrightarrow 0$, $\Delta\vec{r} \simeq \Delta\vec{s}$;

$$\lim \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta\vec{r}} = \frac{d\vec{s}}{d\vec{r}} = 1$$

2) *velocidad media*. . . . . $\vec{V}m = \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$

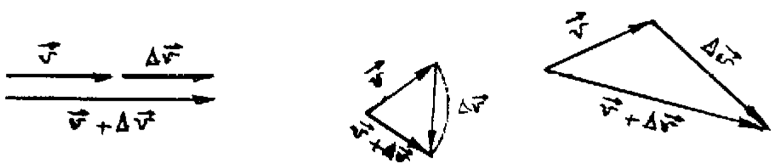
3) *velocidad instantánea*. . . . . . $\vec{v} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$

(vector tange. a la curva, recuérdese teoría vectorial)

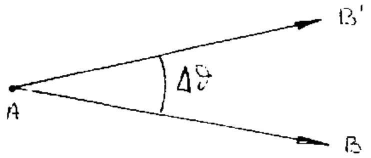
4) *aceleración media*. . . . . $\vec{am} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$

5) *aceleración instantánea*. . . $\vec{a} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$

Dicho de diferentes modos: el desplazamiento es el cambio en los vectores de posición (sin importar el intervalo de tiempo durante el cual tiene lugar ese cambio); la velocidad es la rapidez de variación del cambio de un vector desplazamiento; y la aceleración es la rapidez de variación del cambio de un vector velocidad; los tres son cantidades vectoriales. Es importante recordar que el cambio de una cantidad vectorial puede ocurrir solamente por un cambio de magnitud, solamente por un cambio en la dirección o por ambas a la vez:



15.3.- *<u>Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares</u>.- Con objeto de poder definir conceptos que se van a necesitar a lo largo de la exposición siguiente, y aun alterando un tanto el orden que pudiera parecer lógico, vamos a definir los conceptos subrayados en el encabezamiento de esta sección. Consideremos un segmento AB con el punto A fijo, que se mueve en un plano, de tal modo que en el intervalo de tiempo* Δt *el extremo B se haya desplazado al B', describiendo un ángulo* $\Delta\theta$*; podemos considerar AB y AB' como vectores de posición referidos a A cuando la partícula B se mueve hasta B'. La cantidad* θ *se considera como un vector en A, con dirección perpendicular al* plano formado por AB y AB' y sentido el avance del sacacorchos



girando de B a B', $\overrightarrow{\Delta\theta}$; con esta premisa, se definen la velocidad y aceleración angulares de forma similar a las anteriores:

1) velocidad angular media. . . . . $\vec{w}m = \dfrac{\overrightarrow{\Delta\theta}}{\Delta t}$

2) veloc. angular instantánea. . . $\vec{w} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\overrightarrow{\Delta\theta}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{\theta}}{dt} = \dot{\vec{\theta}}$

3) aceleración angular media. . . . . $\vec{\alpha}m = \dfrac{\Delta\vec{w}}{\Delta t}$

4) acel. angular instantánea. . $\vec{\alpha} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta\vec{w}}{\Delta t} = \dfrac{d\vec{w}}{dt} = \dot{\vec{w}} = \ddot{\vec{\theta}}$

El vector velocidad angular tiene la misma dirección y sentido que el vector desplazamiento angular, mientras que el vector aceleración angular también tiene la misma dirección, pero sentido en función de las circunstancias (coincidente o contrario).

15.4.-*Cinemática de una partícula en diversos sistemas coordenados*.- Una vez definidos todos los conceptos fundamentales de trayectoria, velocidad y aceleración (lógicamente, y según lo definido en la sección anterior, en la partícula no tiene sentido hablar de velocidad y aceleración angulares) se estudiará a continuación el movimiento en los diversos sistemas coordenados. Si bien admitimos que el movimiento es independiente del sistema elegido, la elección adecuada del mismo facilita a menudo la solución de los problemas; es más, problemas hay con fácil solución en un determinado sistema y difícil en otros.

1.- *Coordenadas cartesianas rectangulares*.- Refiriéndonos *a un sistema clásico cartesiano trirrectángulo, y considerando el vector de posición, $\vec{r}$, en el cual sus variables x, y, z serán, en general, función del tiempo, tendremos:*

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}\\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k}\\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}\end{aligned}\right\}\quad \text{en donde:}\quad \begin{aligned}x &= x(t)\\ y &= y(t)\\ z &= z(t)\end{aligned}\qquad [1]$$

estas ecuaciones son generales y se aplican a cualquier movimiento de una partícula. No obstante, una aclaración: x, y, z, son las componentes cartesianas del vector de posición, $\vec{r}$, y tenemos el concepto claro de lo que significan; del mismo modo, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, son las componentes cartesianas de la velocidad, la cual sabemos que es tangente a la trayectoria en cualquier punto de la misma; tal velocidad tangente representa físicamente la trayectoria que llevaría la partícula si alguna otra causa no le obligara a cambiar de dirección. En cambio, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, que también son las componentes cartesianas de la aceleración, no dan clara idea de la actuación de la aceleración, no indican en modo alguno "las variaciones físicas de la velocidad"; de aquí que más adelante, enseguida, recurramos a otras componentes de tal aceleración para expresar más claramente el fenómeno físico; es decir, que daremos "otra forma de descomposición de la misma aceleración", más en consonancia con el fenómeno físico.

Volviendo a las ecuaciones [1], para el caso concreto de movimiento plano, y en un sistema coordenado Oxy, quedan:

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}\\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j}\\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j}\end{aligned}\right\}\quad \text{en donde:}\quad \begin{aligned}x &= x(t)\\ y &= y(t)\end{aligned}\qquad [2]$$

Finalmente, si el movimiento es rectilíneo, todas las direcciones vectoriales coinciden, lógicamente, con el propio eje x, y se suele omitir el carácter vectorial por conocido; pero el alumno no debe olvidar el mencionado carácter vectorial; es decir:

$$\left.\begin{aligned}\vec{r} &= x\cdot\vec{i}\ ;\ \text{o simplemente } r = x\\ \vec{v} &= \dot{\vec{r}} = \dot{x}\cdot\vec{i}\ ;\ \text{o simplemente } v = \dot{r} = \dot{x}\\ \vec{a} &= \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\cdot\vec{i}\ ;\ \text{o simplemente } a = \dot{v} = \ddot{r} = \ddot{x}\end{aligned}\right\}\quad x = x(t)\qquad [3]$$

Es interesante, a menudo, en este último caso de movimientos *rectilíneos, usar de la relación:*

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v \qquad ;$$

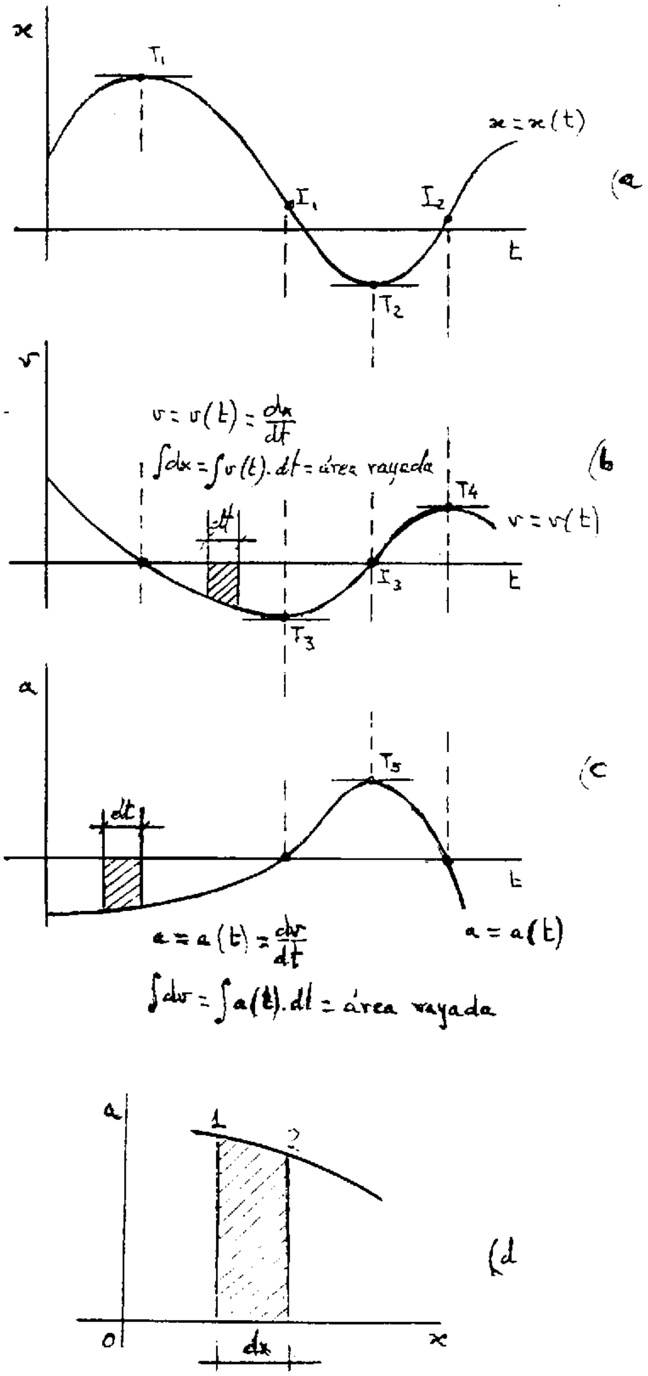
es decir: $$\boxed{v\cdot dv = a\cdot dx} \qquad [4]$$

Siempre que la aceleración sea función de x, a = f(x), de [4] podremos escribir v·dv = f(x)·dx, y será posible la integración para resolver problemas concretos.

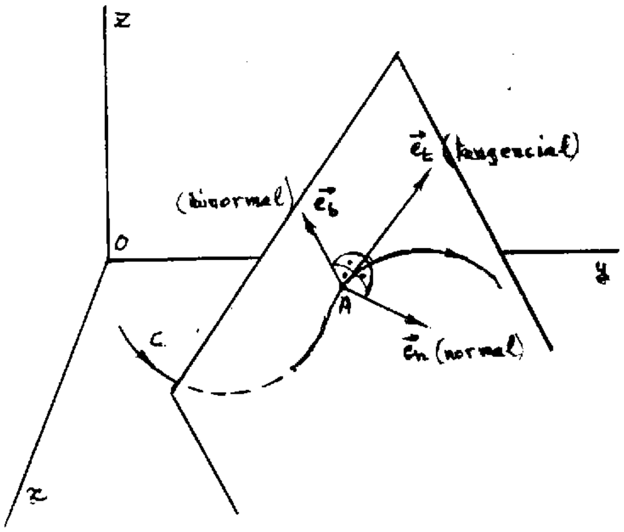
A menudo, en los problemas rectilíneos, es conveniente e ilustrativo dibujar gráficamente ciertas curvas, tales como x = x(t), v = v(t), a = a(t), a = a(x), que permiten mejor estudiar el problema, y a veces hasta resolverlo, aplicando el càlculo diferencial o integral o simples cuestiones geométricas. Téngase presente que la velocidad es la derivada del espacio; o sea, la tangente a la curva x = x(t), y se puede representar tal velocidad conociendo la curva de espacios en función del tiempo, o bien conocer al menos su forma; y a la inversa, de la curva de velocidades se puede conocer la de espacios. Y lo mismo decimos entre las relaciones velocidad - aceleración; véanse detenidamente los gráficos de la página siguiente y sus relaciones: a cada intervalo de tangentes positivas y decrecientes en una curva le corresponden valores positivos y decrecientes en la inmediata inferior; a cada intervalo de tangentes positivas y crecientes, análogamente, le corresponden valores positivos y crecientes; los puntos de tangente nula corresponden con valores nulos en las curvas inferiores; a cada punto de inflexión en la primera, a), (segunda derivada nula) le corresponden máximos o mínimos de la velocidad y, por tanto, valores nulos de la aceleración. Finalmente, de las áreas rayadas y de las fórmulas al margen escritas se deduce que de cada una de ellas se pueden obtener los valores superiores mediante integración (o bien, mediante el cálculo de las áreas, si son figuras geométricas conocidas); y lo mismo se deduce de la cuarta gráfica, d), a = a(x), aceleración en función del espacio:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot v \qquad ;$$

$$\int v\cdot dv = \left.\frac{v^2}{2}\right]_1^2 = \int_1^2 a(x)\cdot dx = \text{área rayada}$$


x
T1
x = x(t)
I1
I2
t
T2
(a
v
v = v(t) = dx/dt
∫dx = ∫v(t).dt = área rayada
(b
T4
v = v(t)
dt
I3
t
T3
a
T5
(c
dt
t
a = a(t) = dv/dt
a = a(t)
∫dv = ∫a(t).dt = área rayada
a
1
2
(d
0
dx
x

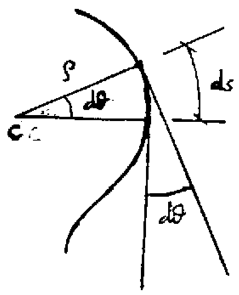
2.- Coordenadas normal, binormal y tangencial.- Consideremos una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria, curva en pincipio no plana; supongamos que en un



cierto instante, t, la partícula está en A. Consideremos el triedro trirrectángulo formado en A por la tangente a la curva, la normal a la misma y la binormal y sus vectores unitarios correspondientes $\vec{e}t$, $\vec{e}n$ y $\vec{e}b$; el plano determinado por $\vec{e}t$ y $\vec{e}n$ se denomina plano osculador (no dibujado en la figura superior) y el plano determinado por $\vec{e}t$ y $\vec{e}b$ se denomina plano tangente (que es el dibujado); el vector $\vec{e}t$ se considera positivo en el sentido del movimiento, mientras que el $\vec{e}n$ está a lo largo del radio de curvatura y es positivo hacia el centro de curvatura.

Las fuerzas existentes a lo largo de estos tres vectores juegan un papel primordial en el movimiento, como se verá en Cinética; sin entrar en más profundidades geométricas, admitamos que $\vec{e}t$ marca la dirección de avance, $\vec{e}n$ fija el cambio de dirección, obliga a seguir una determinada curvatura plana, y $\vec{e}b$ realiza el alabeo de la trayectoria. Nosotros no consideraremos tal binormal y estudiaremos solamente el movimiento curvo plano. Comenzaremos por evaluar el radio de curvatura.

3.- Curvatura de una curva plana (primera fórmula).- Consideremos de nuevo una partícula moviéndose a lo largo de una curva plana; en un intervalo pequeño recorre un camino ds de la trayectoria y el ángulo girado, $d\theta$, es el mismo que el *formado por las tangentes, como se ve en la figura adjunta;* ρ



es el radio de curvatura y C el centro (el arco girado se asocia a una circunferencia en el límite y el centro está en la intersección de las dos normales a la curva). Se define la curvatura, inversa del radio, por la expresión:

$$ds = \rho \cdot d\theta \qquad ; \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} = \text{curvatura}$$

Sea $f(x,y) = 0$ *la ecuación de la trayectoria; tenemos, en función del parámetro* t:

$$x = x(t) \quad ; \quad y = y(t) \quad ; \quad \theta = \theta(t) \quad ; \quad s = s(t)$$

El arco infinitesimal, considerado como triángulo rectángulo con dx y dy, cumple:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \qquad ; \qquad \left[\frac{ds}{dt}\right]^2 = \left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 \quad ;$$

$$\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$$

$$tg\ \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$ *; ahora derivando respecto a t:*

$$\frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dot{x}\cdot\ddot{y} - \dot{y}\cdot\ddot{x}}{\dot{x}^2} = \dot{\theta}(1 + tg^2\theta) = \dot{\theta}\left[1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right] = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^2}\cdot\dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{x}\cdot\ddot{y} - \dot{y}\cdot\ddot{x}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{\dot{s}}{\rho} = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{1/2}}{\rho}$$

quedando, finalmente, y puesto que la curvatura se considera en valor absoluto:

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \left|\frac{\dot{x}\cdot\ddot{y} - \dot{y}\cdot\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}\right|} \qquad [5]$$

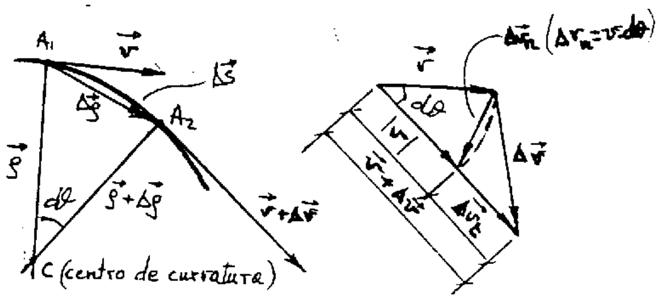
Para el caso particular $y = f(x)$, considerando la ecuación con parámetro $t = x$,

$$x = x \quad , \quad \dot{x} = 1 \quad , \quad \ddot{x} = 0$$

$$y = (x) \quad , \quad \dot{y} \qquad \ddot{y}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2y/dx^2}{\left[1 + (dy/dx)^2\right]^{3/2}}\right|} \qquad [6]$$

4.- <u>Ecuaciones para la velocidad y aceleración en componentes tangencial y normal</u>.- Simplemente, de las figuras de la página siguiente, puede irse deduciendo sucesivamente; considerando dos posiciones infinitamente próximas, A1 y A2, con variaciones correspondientes del radio de curvatura y la velocidad de $\vec{\rho}$ a $\vec{\rho} + \Delta\vec{\rho}$ y $\vec{v}$ a $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ (que puede ser en módulo y posición o solamente en módulo, como ya se dijo):



1º) velocidad:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\,\frac{ds}{dt}$$

$$v = \frac{ds}{dt} \quad ; \quad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{et} \qquad\qquad \boxed{\vec{v} = v\cdot\vec{et}} \qquad [7]$$

Indudablemente, el módulo de la velocidad vale:

$$v = \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2} \quad ; \text{ siendo } x = x(t), \qquad y = y(t)$$

2º) aceleración: (Téngase presente en el cálculo siguiente que $\Delta\vec{v}$ se descompone, según la figura de la derecha, en dos sumandos, que al tender el ángulo a cero, uno, $\Delta\vec{v}t$, tiene la dirección tangente a la curva en A1; y el otro, $\Delta\vec{v}n$, tiende a la normal a la tangente en A1, al considerar un triángulo isósceles de ángulo agudo nulo):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta vt\cdot\vec{et} + \Delta vn\cdot\vec{en}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}\cdot\vec{et} +$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta vn}{\Delta t}\cdot\vec{en} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{et} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\cdot\Delta\theta}{\Delta t}\cdot\vec{en} = \frac{dv}{dt}\cdot\vec{et} +$$

$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta r}{\rho} \cdot \vec{en} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{et} + \frac{v}{\rho} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \vec{en} =$$

$$= \frac{dv}{dt} \cdot \vec{et} + \frac{v}{\rho} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \vec{en} = \boxed{\frac{dv}{dt} \cdot \vec{et} + \frac{v^2}{p} \cdot \vec{en} = \vec{a}} \qquad [8]$$

El primer sumando representa la aceleración tangencial, conceptualmente el incremento de velocidad tangencial; el segundo es la aceleración normal, en la dirección del radio de curvatura, y es, como se dijo, el exponente físico del cambio de dirección. Indudablemente, puesto que la aceleración se puede descomponer según los ejes coordenados o según el valor tangencial y normal, su único módulo se puede calcular:

$$a = \sqrt{\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]^2 + \left[\frac{d^2y}{dt^2}\right]^2} = \sqrt{at^2 + an^2}$$

Nótese, por otra parte, que tenemos:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad ; \quad v = \frac{ds}{dt} \quad ; \quad \dot{v} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s} \quad ; \quad a \neq \ddot{s}$$

$$a = \sqrt{\ddot{s}^2 + \left[\frac{\dot{s}^2}{p}\right]^2} = \sqrt{at^2 + an^2}$$

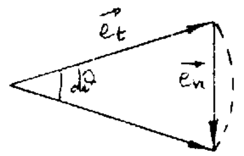
$\ddot{s}$ no es el módulo de la aceleración, sino la "variación de la magnitud velocidad" (no la variación del vector velocidad); representa, por tanto, digámoslo de nuevo, el módulo de la aceleración tangencial.

Un caso concreto y particular se presenta en el movimiento circular, con radio constante;

$$\left.\begin{array}{l} s = s(t) \\ \theta = \theta(t) \end{array}\right| \quad s = r\cdot\theta \;;\; \dot{s} = r\cdot\dot{\theta} = r\cdot w \;;\; \vec{v} = r\cdot w\cdot\vec{et}$$

$$\ddot{s} = r\cdot\ddot{\theta} = r\cdot\alpha \;;\; \vec{a} = r\cdot\alpha\cdot\vec{et} - r\cdot w^2\cdot\vec{en}$$

5.- *<u>Segunda y tercera fórmulas de la curvatura de una curva plana</u>.- Para la segunda partimos de $d\vec{r}/ds = \vec{et}$ y nos basamos en la figura adjunta:*



$d\vec{e_t} = \vec{e_t}\cdot d\theta = d\theta$

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \frac{d\vec{et}}{ds} = \frac{d\vec{et}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\vec{et}}{d\theta} =$$

$$= \frac{1}{\rho}\cdot\vec{en} \quad ; \quad \boxed{\frac{1}{\rho} = \left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|} \qquad [9]$$

Para la tercera fórmula partimos de:

$$\vec{a} = \vec{an} + \vec{at} = an\cdot\vec{en} + at\cdot\vec{et}$$

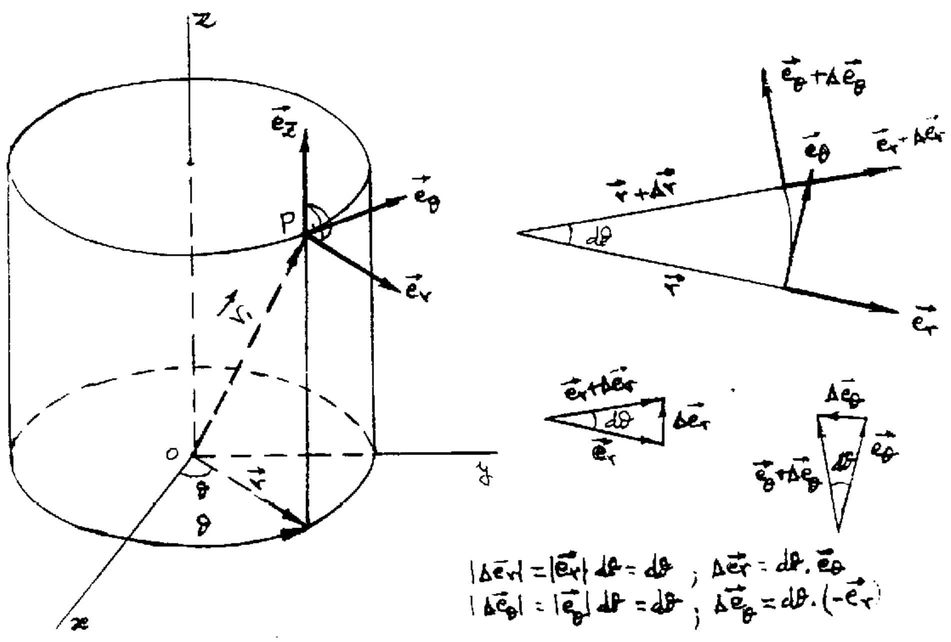
Multiplicando ambos miembros vectorialmente por $\vec{v}$, y teniendo en cuenta que $\vec{v}$ y $\vec{at}$ son de dirección coincidente y que $\vec{v}$ y $\vec{an}$ son perpendiculares entre sí:

$$\vec{v}\wedge\vec{a} = \vec{v}\wedge(\vec{an} + \vec{at}) = \vec{v}\wedge\vec{an}$$

$$|\vec{v}\wedge\vec{a}| = |\vec{v}\wedge\vec{an}| = v\cdot an\cdot sen\ 90º = v\cdot an = \frac{v^3}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{|\vec{v}\wedge\vec{a}|}{v^3}} \qquad [10]$$

6.- *<u>Coordenadas cilíndricas y polares</u>.- En algunos problemas, por sus propias peculiaridades y por sus* *determinadas características geométricas, es conveniente usar coordenadas cilíndricas (o en el caso de problemas planos, coordenadas polares). En coordenadas cilíndricas un punto se localiza (ver figura) en función de tres valores: el radio r,*



al que corresponde un vector unitario, $\vec{er}$; el ángulo a partir de un origen y medido en sentido antihorario, θ, al que corresponde un vector unitario perpendicualr al radio, $\vec{e\theta}$; y, finalmente, su cota o altura al plano de referencia, z, con el vector unitario, $\vec{ez}$; es decir, P(r,θ,z). Y aquí nos encontramos con un hecho nuevo, y es que, mientras en un sistema cartesiano fijo, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son así mismo fijos (no lo serán cuando dicho sistema se desplace y gire), al desplazarse el punto P varían con él los vectores $\vec{er}$ y $\vec{e\theta}$, si bien $\vec{ez}$ se conserva siempre fijo (en dirección y sentido). Estudiemos, por tanto, los cambios de $\vec{er}$ y $\vec{e\theta}$. Se sigue suponiendo que r = r(t), θ = θ(t), y z = z(t); entonces, de la misma figura anterior, de los detalles a la derecha, deducimos:

$$d\vec{er} = er \cdot d\theta \cdot \vec{e\theta} = d\theta \cdot \vec{e\theta} \quad ; \quad d\vec{e_r}/d\theta = \vec{e\theta}$$

(véase la dirección y sentido que toma $\vec{er}$ cuando θ ---> 0)

$$\dot{e}r = \frac{d\vec{er}}{dt} = \frac{d\vec{er}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \cdot \vec{e\theta}$$

$d\vec{e\theta} = e\theta\cdot d\theta\cdot(-\vec{er}) = d\theta\cdot(-\vec{er})$; $d\vec{e\theta}/d\theta = -\vec{er}$ *(véase la dirección y sentido que toma* $\vec{e\theta}$ *cuando* $\theta \longrightarrow 0$*)*

$$\dot{e\theta} = \frac{d\vec{e\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\cdot\vec{er}$$

Ahora la deducción de la velocidad y de la aceleración serán meras aplicaciones de lo anterior, derivando sucesivamente:

$$\vec{OP} = \boxed{\vec{r1} = r\cdot\vec{er} + z\cdot\vec{ez}} \qquad [11]$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r1}} = \dot{r}\cdot\vec{er} + r\cdot\dot{\vec{er}} + \dot{z}\cdot\vec{ez} = \boxed{\dot{r}\cdot\vec{er} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e\theta} + \dot{z}\cdot\vec{ez} = \vec{v}} \qquad [12]$$

En esta segunda fórmula el primer sumando expresa la velocidad radial, el segundo la tangencial en el plano de referencia y el tercero la velocidad de elevación. Lógicamente, en un movimiento tal que el radio sea constante (sobre la superficie lateral de un cilindro de radio fijo, por ejemplo) no existe $\dot{r}$.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r1}} = \ddot{r}\cdot\vec{er} + \dot{r}\cdot\dot{\vec{er}} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{e\theta} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\vec{e\theta}} + \ddot{z}\cdot\vec{ez} =$$

$$= \ddot{r}\cdot\vec{er} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e\theta} + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{e\theta} - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot\vec{er} + \ddot{z}\cdot\vec{ez} =$$

$$= \boxed{(\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2)\cdot\vec{er} + (2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta})\cdot\vec{e\theta} + \ddot{z}\cdot\vec{ez}} \qquad [13]$$

De forma semejante, en esta última fórmula el primer paréntesis implica las aceleraciones radial y normal, no existiendo la primera si el radio es constante. El segundo paréntesis abarca un primer sumando, que justificaremos más adelante, aceleración de Coriolis, y que no existe si no se dan "simultáneamente" $\dot{r}$ *y* $\dot{\theta}$*; y un segundo sumando, aceleración tangencial. Finalmente, el úlitmo valor es la aceleración de elevación.*

En el plano, como se dijo, resultan las coordenadas polares, con las expresiones:

$$\boxed{\vec{r1} = r\cdot\vec{er}} \qquad [11']$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\cdot\vec{er} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e\theta}} \qquad [12']$$

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\cdot\dot{\theta}^2)\cdot\vec{er} + (2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\theta} + r\cdot\ddot{\theta})\cdot\vec{e\theta}} \qquad [13']$$

Para el caso particular de movimiento circular, r = constante, resultan las fórmulas ya conocidas:

$$\vec{r1} = r\cdot\vec{er} \qquad [11'']$$

$$\vec{v} = r\cdot\dot{\theta}\cdot\vec{e\theta} = r\cdot w\cdot\vec{e\theta} \quad \text{(vel. tangencial)} \qquad [12'']$$

$$\vec{a} = -\, r\cdot\dot{\theta}^2\cdot\vec{er} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot\vec{e\theta} = -\, r\cdot w^2\cdot\vec{er} + r\cdot\alpha\cdot\vec{e\theta} \qquad [13'']$$

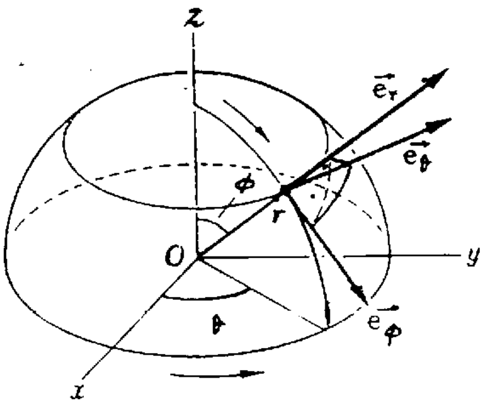
(aceleraciones normal y tangencial)

Para el paso de coordenadas cartesianas a cilíndricas o viceversa se han de tener en cuenta las relaciones matemáticas:

$$\vec{r1} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} \quad ; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad z = z \quad tg\theta = y/x$$

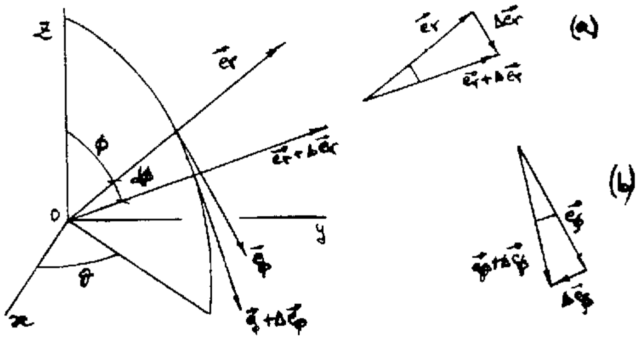
7.- <u>Coordenadas esféricas</u>.- Representa el sistema más empleado <u>en astronomía y movimientos</u> de tipo espacial. en la figura aquí abajo se ilustran las coordenadas y vectores unita-



Coordenadas esféricas

rios, así como los sentidos de avance de θ y ϕ; entonces, $P(r,\theta,\phi)$; $\vec{er}$ tiene la dirección de r, $\vec{e\theta}$ es perpendicular al plano meridiano por P y $\vec{e\phi}$ es tangente en P a dicho plano meridiano. Aquí los tres vectores unitarios son variables al desplazarse P y el problema de sus derivaciones, basado en los mismos principios del caso de coordenadas cilíndricas, es más laborioso y lo iremos desglosando en partes.

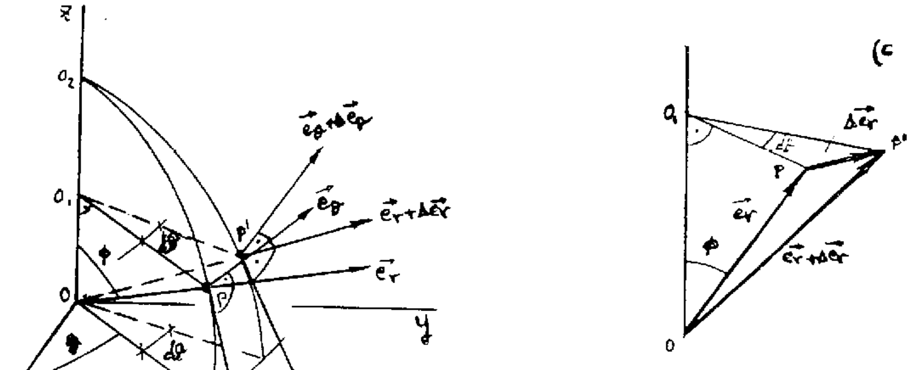
Consideremos primeramente un incremento de ϕ, que hace variar $\vec{er}$ y $\vec{e\phi}$, pero no $\vec{e\theta}$:



$$d\vec{er} = er\cdot d\phi\cdot\vec{e\phi} = d\phi\cdot\vec{e\phi} \quad ; \quad d\vec{er}/d\phi = \vec{e\phi} \quad \text{[véase detalle (a)]}$$

$$d\vec{e\phi} = e\phi\cdot d\phi\cdot(-\vec{er}) = -\,d\phi\cdot\vec{er} \;;\; d\vec{e\phi}/d\phi = -\,\vec{er} \quad \text{[véase detalle (b)]}$$

En segundo lugar, consideremos un incremento de θ, que hace variar los tres vectores unitarios:



$\Delta e_r = |\vec{e_r}|\,sen\,\phi.\,\Delta\theta = sen\,\phi.\,\Delta\theta$

$\Delta\vec{e_r} = sen\,\phi.\,\Delta\theta.\,\vec{e_\theta}$

$$d\vec{er} = (er\cdot sen\phi)\cdot d\theta\cdot\vec{e\theta} = sen\phi\cdot d\theta\cdot\vec{e\theta} \quad ; \quad d\vec{er}/d\theta = sen\phi\cdot\vec{e\theta}$$

[véase detalle (c)]

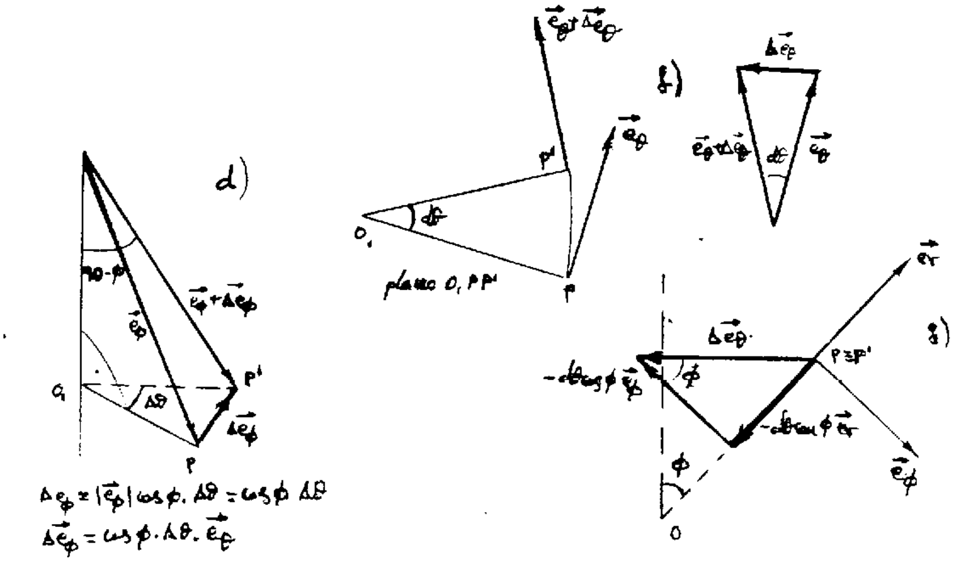
$$d\vec{e\phi} = (e\phi\cdot\cos\phi)\cdot d\theta\cdot\vec{e\theta} = \cos\phi\cdot d\theta\cdot\vec{e\theta} \quad ; \quad d\vec{e\phi}/d\theta = \cos\phi\cdot\vec{e\theta}$$

[véase detalle (d)]

$$d\vec{e\theta} = (e\theta\cdot d\theta\cdot \mathrm{sen}\phi)\cdot(-\vec{er}) + (e\theta\cdot d\theta\cdot\cos\phi)\cdot(-\vec{e\phi}) =$$

$$= -\,\mathrm{sen}\phi\cdot d\theta\cdot\vec{er} - \cos\phi\cdot d\theta\cdot\vec{e\phi} \quad ; \quad d\vec{e\theta}/d\theta = -\,\mathrm{sen}\phi\cdot\vec{er} - \cos\phi\cdot\vec{e\phi}$$

[véanse detalle (f) y (g)]



Derivando ahora, del mismo modo que se hizo en coordenadas cilíncricas:

$$\vec{er} = f(\theta,\phi)$$

$$\dot{\vec{er}} = \frac{d\vec{er}}{dt} = \frac{d\vec{er}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{er}}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} = \dot\theta\cdot\mathrm{sen}\phi\cdot\vec{e\theta} + \dot\phi\cdot\vec{e\phi}$$

$$\vec{e\phi} = f(\theta,\phi)$$

$$\dot{\vec{e\phi}} = \frac{d\vec{e\phi}}{dt} = \frac{d\vec{e\phi}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\vec{e\phi}}{d\phi}\cdot\frac{d\phi}{dt} = \dot\theta\cdot\cos\phi\cdot\vec{e\theta} - \dot\phi\cdot\vec{er}$$

$$\vec{e\theta} = f(\theta)$$

$$\dot{\vec{e\theta}} = \frac{d\vec{e\theta}}{dt} = \frac{d\vec{e\theta}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\,\dot\theta\cdot\mathrm{sen}\phi\cdot\vec{er} - \dot\theta\cdot\cos\phi\cdot\vec{e\phi}$$

Y llevando a las ecuaciones del espacio, velocidad y aceleración:

$$\vec{r_1} = r\cdot\vec{e_r} \qquad [14]$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r_1}} = \dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\dot{\vec{e_r}} = \boxed{\dot{r}\cdot\vec{e_r} + r\cdot\dot{\phi}\cdot\vec{e_\phi} + r\cdot\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_\theta} = \vec{v}} \qquad [15]$$

Como en coordenadas cilíndricas, también aquí el valor de la velocidad es claro: el primer sumando es la velocidad radial, el segundo es la velocidad tangencial en el plano del meridiano y el tercero es la velocidad tangencial en el plano paralelo por P, de radio real $r\cdot sen\phi$.

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r_1}} = \ddot{r}\cdot\vec{e_r} + \dot{r}\cdot\dot{\vec{e_r}} + \dot{r}\cdot\dot{\phi}\cdot\vec{e_\phi} + r\cdot\ddot{\phi}\cdot\vec{e_\phi} + r\cdot\dot{\phi}\cdot\dot{\vec{e_\phi}} +$$
$$+ \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\phi}\cdot cos\phi\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\dot{\vec{e_\theta}} =$$
$$= \ddot{r}\cdot\vec{e_r} + \dot{r}\cdot(\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_\theta} + \dot{\phi}\cdot\vec{e_\phi}) + \dot{r}\cdot\dot{\phi}\cdot\vec{e_\phi} + r\cdot\ddot{\phi}\cdot\vec{e_\phi} +$$
$$+ r\cdot\dot{\phi}\cdot(\dot{\theta}\cdot cos\phi\cdot\vec{e_\theta} - \dot{\phi}\cdot\vec{e_r}) + \dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\ddot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_\theta} +$$
$$+ r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\phi}\cdot cos\phi\cdot\vec{e_\theta} + r\cdot\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot(-\dot{\theta}\cdot sen\phi\cdot\vec{e_r} - \dot{\theta}\cdot cos\phi\cdot\vec{e_\phi}) =$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= (\ddot{r} - r\cdot\dot{\phi}^2 - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot sen^2\phi)\cdot\vec{e_r} + \\ &+ (2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\phi} + r\cdot\ddot{\phi} - r\cdot\dot{\theta}^2\cdot sen\phi\cdot cos\phi)\cdot\vec{e_\phi} + \\ &+ (2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\theta}\cdot sen\phi + r\cdot\ddot{\theta}\cdot sen\phi + 2\cdot r\cdot\dot{\theta}\cdot\dot{\phi}\cdot cos\phi)\cdot\vec{e_\theta} = \vec{a} \end{aligned}} \qquad [16]$$

Intentemos también justificar los resultados: en el primer paréntesis se incluyen una aceleración radial, una normal en el plano del meridiano y otra tercera, que se explica así:

la velocidad del plano paralelo, última de [15], dará una normal en el propio plano paralelo:

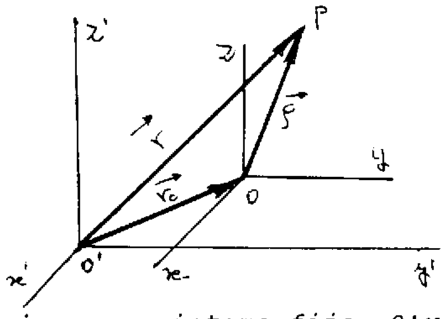
$$\frac{v^2}{r} = \frac{r^2\cdot\dot{\theta}^2\cdot sen^2\phi}{r\cdot sen\phi} = r\cdot\dot{\theta}^2\cdot sen\phi$$

que se proyectará como normal en el vector $\vec{e_r}$, $r\cdot\dot{\theta}^2\cdot sen^2\phi$, tercer sumando comentado; y otro normal en el vector $\vec{e_\phi}$, $r\cdot\theta^2\cdot sen\phi\cdot cos\phi$, último del segundo paréntesis de [16].

El resto del segundo paréntesis lo forman: una aceleración de Coriolis, $2\cdot\dot{r}\cdot\dot{\phi}$, que también justificaremos más adelante; y otra aceleración tangencial del meridiano.

Del tercer paréntesis solo es fácilmente asimilable el segundo término, aceleración tangencial en el radio $r\cdot\text{sen}\phi$; los otros dos son más difíciles de comprender, si bien resultan ser dos nuevas aceleraciones de Coriolis debidamente proyectadas; el primero es el resultado de una velocidad, $\dot{r}$, y una velocidad angular, $\dot{\theta}$, que forman entre sí un ángulo ϕ; la segunda es el resultado de una velocidad, $r\cdot\dot{\phi}$, y una velocidad angular, $\dot{\theta}$, que forman entre sí un ángulo $(90º - \phi)$.

15.5.- <u>*Movimiento relativo de dos partículas (sistema móvil en traslación)*</u>.- Hasta aquí hemos considerado un solo sistema de referencia para describir el movimiento de una partícula, sistema que, además, se ha supuesto fijo ("unido" a la tierra). En ocasiones es conveniente utilizar simultáneamente varios sistemas de referencia; supondremos uno de ellos "unido" a la tierra, considerado como "sistema de referencia fijo", mientras que los demás serán "sistemas de referencia móviles". Considérense dos partículas O y P moviéndose en el



$$\vec{r} = \vec{ro} + \vec{\rho}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{ro}} + \dot{\vec{\rho r}}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{ro}} + \ddot{\vec{\rho r}}$$

espacio y un sistema fijo, O'x'y'z', y otro móvil, Oxyz, unido a O y con ejes constantemente paralelos a los fijos, es decir, con movimiento de traslación respecto a tales ejes fijos. El valor ρ define la posición de P respecto de O (es el vector de posición de P respecto de un observador supuesto colocado en O). Podemos escribir vectorialmente, y derivar dos veces luego:

$$\vec{r} = \vec{ro} + \vec{\rho} \quad ; \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{ro}} + \dot{\vec{\rho r}} \quad ; \quad \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{ro}} + \ddot{\vec{\rho r}} \qquad [17]$$

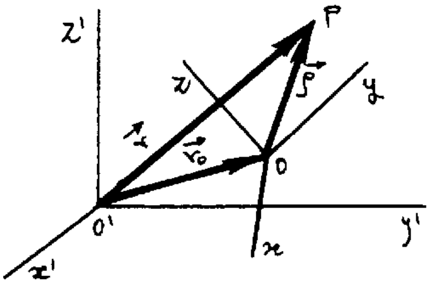
El significado de tales expresiones [17] es el siguiente: supuesto dos automóviles en movimiento, ρ, $\dot{\rho r}$ y $\ddot{\rho r}$ son respectivamente la distancia, velocidad y aceleración con que el conductor de O ve al conductor de P; $\dot{\rho r}$ y $\ddot{\rho r}$ se suelen denominar, por eso, velocidad y aceleración de P respecto a O; a menudo se escribe también:

$$\vec{\dot{pr}} = \vec{vp/o} \qquad ; \qquad \vec{\ddot{pr}} = \vec{ap/o}$$

e, indudablemente, $\vec{r}$, $\vec{\dot{r}}$ y $\vec{\ddot{r}}$ son las posición, velocidad y aceleración absolutas de P respecto del sistema fijo, lo mismo que $\vec{ro}$, $\vec{\dot{ro}}$ y $\vec{\ddot{ro}}$ lo son del punto 0. Los movimientos de P y 0 son "movimientos absolutos" respecto del sistema fijo (los que vería un observador en 0'), mientras que también se habla del "movimiento relativo" de P respecto de 0 como de "las sensaciones" que la posición de P experimenta vistas desde 0 al considerar la posición, velocidad y aceleración de P.

Por supuesto que $\vec{\dot{pr}} = \vec{\dot{r}} - \vec{\dot{ro}}$, $\vec{\ddot{pr}} = \vec{\ddot{r}} - \vec{\ddot{ro}}$, es decir, que la velocidad y aceleración relarivas son la diferencia vectorial, en cada caso, de las absolutas del punto P y del punto 0.

15.6.- *<u>Movimiento relativo de dos partículas (sistema móvil en rotación)</u>.- El problema que nos ocupa ahora a menudo se presta a confución en los estudiantes, al compararlo con el precedente, siendo, sin embargo, muy diferente. Allí se trataba de movimientos relativos entre dos partículas; es*



$$\vec{r} = \vec{ro} + \vec{p}$$

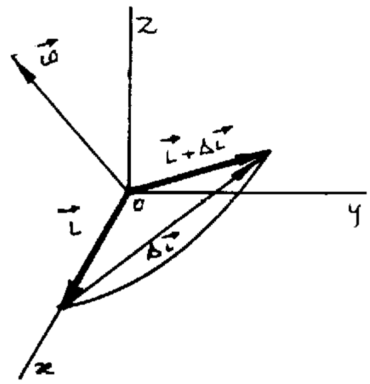
$$\vec{\dot{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\dot{ro}} + \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{\ddot{r}} = \frac{d\vec{\dot{r}}}{dt} = \vec{\ddot{ro}} + \frac{d^2\vec{p}}{dt^2}$$

decir, como entonces escribimos, se trataba de estudiar "la senseción" de cómo 0 vería a P. Aquí supondremos un solo observador en 0', que ve el movimiento de P; si tal movimiento es fácil de evaluar, es decir, si sus espacio ($\vec{r}$), velocidad ($\vec{\dot{r}}$) y aceleración ($\vec{\ddot{r}}$) se pueden calcuar directamente, huelga cuanto se va a añadir.

Pero imaginemos que no se conoce directamente tal movimiento; o bien que, por alguna razón, interesa descomponerlo; y supongamos que lo descomponemos por intermedio de un sistema móvil en 0; en 0 podemos imaginar un observador provisional, que ve moverse a P y envía información de tal movimiento a 0'. Es decir, que 0', que no analiza directamente el movimiento de P, lo hace sumando el movimiento que observa de 0 con la información que recibe desde 0 del movimiento relativo de P respecto a 0.

Pero, además, con otra consideración: que el sistema 0xyz ya no se traslada paralelamente, sino que gira con una velocidad angular w, además de estar desplazándose con una velocidad $\vec{\dot{ro}}$ respecto de 0'; en estas condiciones los vectores unitarios del sistema móvil, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, ya son variables (no en magnitud, lógicamente, pero sí en dirección), admitiendo derivadas (variaciones respecto del tiempo); por tanto,, y con estas premisas, el cálculo será diferente:



$$\vec{r} = \vec{ro} + \vec{\rho} \quad ; \quad \vec{\rho} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$\dot{\vec{\rho}} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \underbrace{\dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k}}_{\dot{\vec{\rho}}_r} +$$

$$+ x\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + y\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + z\cdot\frac{d\vec{k}}{dt}$$

Los tres primeros sumandos representan la velocidad relativa de P respecto de 0, $\dot{\vec{\rho}}r$. Respecto a los otros tres: en la rotación w alrededor del sistema 0xyz, el vector unitario $\vec{i}$ va a una nueva posición (girando alrededor del eje de rotación) tomando el nuevo valor $\vec{i} + \Delta\vec{i}$, de tal modo que $d\vec{i}/dt$ representa la velocidad del extremo de $\vec{i}$ en la rotación w, velocidad que, como se verá en su momento, al estudiar las rotaciones, se calcula mediante $\vec{w}\wedge\vec{i}$; de forma semejante, $d\vec{j}/dt = \vec{w}\wedge\vec{j}$, $d\vec{k}/dt = \vec{w}\wedge\vec{k}$:

$$\dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{\rho}}r + x\cdot(\vec{w}\wedge\vec{i}) + y\cdot(\vec{w}\wedge\vec{j}) + z\cdot(\vec{w}\wedge\vec{k}) = \dot{\vec{\rho}}r + \vec{w}\wedge x\cdot\vec{i} + \vec{w}\wedge y\cdot\vec{j} +$$

$$+ \vec{w}\wedge z\cdot\vec{k} = \dot{\vec{\rho}}r + \vec{w}\wedge(x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}) = \dot{\vec{\rho}}r + \vec{w}\wedge\vec{\rho}$$

por tanto: $$\boxed{\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{ro}} + \dot{\vec{\rho}}r + \vec{w}\wedge\vec{\rho}} \qquad [18]$$

En la expresión [18] $\dot{\vec{ro}}$ representa la velocidad de movimiento absoluto de 0 respecto de 0' (aclaración: el movimiento de 0 respecto de 0' puede ser cualquiera, general completamente, incluso otra rotación a su vez); $\dot{\vec{\rho}}r$ representa la velocidad relativa de P respecto a 0 (que también pudiera ser otra rotación, distinta de w); y $\vec{w}\wedge\vec{\rho}$ la velocidad de rotación de P en el giro del sistema móvil.

Volviendo a derivar:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{ro}} + \frac{d}{dt}\cdot(\dot{x}\cdot\vec{i} + \dot{y}\cdot\vec{j} + \dot{z}\cdot\vec{k}) + \frac{d}{dt}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{\rho}) =$$

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_o + \underbrace{\ddot{x}\cdot\vec{i} + \ddot{y}\cdot\vec{j} + \ddot{z}\cdot\vec{k}}_{\ddot{\vec{\rho}}_r} + \dot{x}\cdot\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{y}\cdot\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{z}\cdot\frac{d\vec{k}}{dt} +$$

$$+ \dot{\vec{w}}\wedge\vec{\rho} + \vec{w}\wedge\dot{\vec{\rho}} = \ddot{\vec{r}}_o + \ddot{\vec{\rho}}_r + \dot{x}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{i}) + \dot{y}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{j}) + \dot{z}\cdot(\vec{w}\wedge\vec{k}) +$$

$$+ \dot{\vec{w}}\wedge\vec{\rho} + \vec{w}\wedge(\dot{\vec{\rho}}_r + \vec{w}\wedge\vec{\rho}) = \ddot{\vec{r}}_o + \ddot{\vec{\rho}}_r + \vec{w}\wedge\dot{\vec{\rho}}_r + \dot{\vec{w}}\wedge\vec{\rho} + \vec{w}\wedge\dot{\vec{\rho}}_r +$$

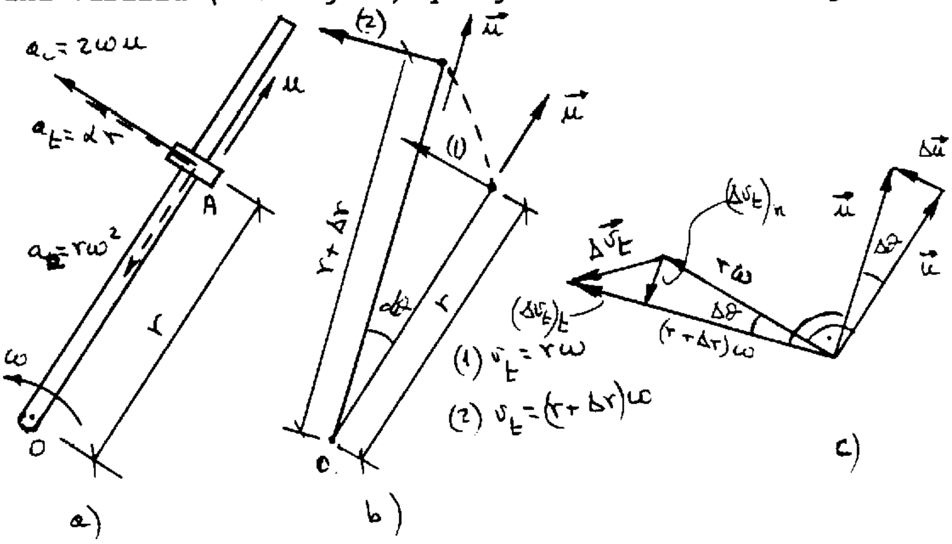
$$+ \vec{w}\wedge\vec{w}\wedge\vec{\rho} =$$

$$\boxed{\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_o + \ddot{\vec{\rho}}_r + 2\cdot\vec{w}\wedge\dot{\vec{\rho}}_r + \dot{\vec{w}}\wedge\vec{\rho} + \vec{w}\wedge\vec{w}\wedge\vec{\rho}} \qquad [19]$$

En la expresión [19] $\ddot{\vec{r}}_o$ es la aceleración absoluta de O; $2\cdot\vec{w}\wedge\dot{\vec{\rho}}_r$ es la llamada aceleración de Coriolis, que enseguida vamos a justificar; $\dot{\vec{w}}\wedge\vec{\rho} = \vec{\alpha}\wedge\vec{\rho}$ es la aceleración tangencial de P debida el giro del sistema móvil; y, finalmente, $\vec{w}\wedge\vec{w}\wedge\vec{\rho}$ es la aceleración normal del mismo giro.

Siempre que coexistan una aceleración angular, $\vec{w}$, y una velocidad lineal, $\dot{\vec{\rho}}_r$, formando entre sí un determinado ángulo, vamos a razonar (al menos de forma intuitiva, conceptual) que surge una nueva aceleración, denominada de Coriolis, que vale $2\cdot\vec{w}\wedge\dot{\vec{\rho}}_r$, y la cual no estamos habituados a comprender, pero que es tan real y cierta como la tangencial o la normal:

Sea una varilla (ver figura) que gira alrededor de O y sobre la



la cual hay un pasador A, que se desliza con una velocidad $\vec{u}$ (que se supone constante, para más claridad del fenómeno). Conocemos las clásicas aceleraciones normal, $r \cdot w^2$, y tangencial (si existe aceleración tangencial, α) $\alpha \cdot r$, dibujadas ambas en trazo discontinuo; para $\alpha = 0$ no existe la tangencial, pero siempre existe la normal ante una w y r determinados (figura a).

En la figura b se han considerado dos instantes infinitamente próximos, girados un ángulo $\Delta\theta$ ($= w \cdot \Delta t$) y con posiciones r y $r + \Delta r$; y sus respectivas velocidades relativas, $\vec{u}$ y tangenciales, variables en función del radio.

En la figura c se han dibujado los incrementos de ambas velocidades, $\Delta\vec{u}$ y $\Delta\vec{vt}$; reparar en que cada $\vec{u}$ y su tangencial correspondiente son perpendiculares entre sí; con lo cual, al descomponer Δvt en la figura resultan dos vectores, uno tangencial y otro normal; y en el límite, si $\Delta\theta \longrightarrow 0$, Δu y $(\Delta vt)t$ tienen la misma dirección. Tenemos:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{(\Delta vt)n}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(r \cdot w) \cdot \Delta\theta}{\Delta t} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta t \to 0} (r \cdot w) \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot \vec{n} =$$

$$= (r \cdot w) \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{n} = r \cdot w^2 \cdot \vec{n}$$

Se obtiene así, la aceleración normal; sumando las otras dos variaciones:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t} + \frac{(\Delta vt)t}{\Delta t} \right] = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{u \cdot \Delta\theta}{\Delta t} + \frac{w \cdot \Delta r}{\Delta t} \right] \vec{t} =$$

$$= \left[u \cdot \frac{d\theta}{dt} + w \cdot \frac{dr}{dt} \right] \cdot \vec{t} = (u \cdot w + w \cdot u) \cdot \vec{t} = 2 \cdot \cdot w \cdot u \cdot \vec{t}$$

y, en general, se puede demostrar que $\vec{ac} = 2 \cdot \vec{w} \wedge \dot{\vec{pr}}$. Evidentemente, si $\vec{u} = 0$, r = constante y solo habrá $\vec{an}$ y $\vec{at}$ (y esta última, como se dijo, si $\alpha \neq 0$).